Astrofísica Relativista

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

Instituto de Astronomía

Universidad Nacional Autónoma

de México

Octubre, 2003

(Última modificación: Enero, 2006)

Índice general

Índice general **3**

Índice de figuras **7**

Prefacio **9**

Copyright **11**

Agradecimientos **13**

I. Introducción a la astrofísica **17**

§1. Historia 17

§2. Astronomía en Mesoamérica 21

§3. Astrofísica relativista 23

§4. Constituyentes básicos del universo 26

§5. Radiación de fondo 30

§6. Mediciones en astrofísica 37

II. Relatividad Especial **47**

§7. Vectores y tensores en el espacio euclidiano de 3D 47

§8. Principio de relatividad 51

§9. Relatividad del tiempo 53

§10. Intervalos 57

§11. Tiempo propio 62

§12. Transformación de Lorentz 66

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

§13. Cuatro–vectores 70
§14. Mecánica relativista 79

III. Electromagnetismo. 83
§15. Movimiento en un campo electromagnético 84
§16. Tensor electromagnético 87
§17. Ecuaciones del campo electromagnético 89
§18. Efecto Doppler 94

IV. Hidrodinámica Relativista 97
§19. Tensor de energía–momento 97
§20. Cuerpo macroscópico 101
§21. Ecuaciones de la hidrodinámica 102
§22. Hidrodinámica no–relativista 106
§23. Cosmología Newtoniana 108

V. Estrellas 113
§24. Criterio de Jeans 113
§25. Energía de amarre gravitacional 116
§26. Ecuaciones de estructura estelar 119
§27. Generación de reacciones nucleares 128
§28. Modelos estelares 133
§29. Presión degenerativa 134
§30. Enanas blancas 136
§31. Estrellas de neutrones 139
§32. Supernovas 140
§33. Pulsares 149
§34. Límite de Eddington 153
§35. Transferencia de masa 154
§36. Acreción 158

VI. Relatividad General 175
§37. Experimentos de Eötvos, Dicke y Braginsky 176

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

§38. Principio de equivalencia . . . 178
§39. Gravitación y espacios curvos . . . 179
§40. Corrimiento al rojo gravitacional . . . 182
§41. Deflexión de rayos de luz . . . 184
§42. Vectores y tensores en espacios curvos . . . 185
§43. Intervalos de espacio y tiempo . . . 192
§44. Diferenciación . . . 195
§45. Movimiento de una partícula . . . 204
§46. Ecuaciones del campo gravitacional . . . 207
§47. Espacios isotrópicos curvos . . . 215

VII. Agujeros negros 221
§48. Métrica de Schwarzschild . . . 221
§49. Órbitas alrededor de objetos compactos . . . 224
§50. Perihelio de órbitas planetarias . . . 229
§51. Partículas y rayos de luz cerca de agujeros negros . . . 231
§52. Energía de amarre en órbitas circulares . . . 233
§53. Deflexión de la luz por objetos gravitacionales . . . 234
§54. Experimentos en gravitación relativista . . . 236
§55. Agujeros negros en general . . . 240
§56. Leyes de la termodinámica para agujeros negros . . . 244
§57. Núcleos activos de galaxias . . . 246
§58. Discos de acreción alrededor de agujeros negros . . . 250
§59. Leyes de escala en agujeros negros . . . 252
§60. Jets extragalácticos . . . 253

VIII. Cosmología 259
§61. Observaciones cosmológicas . . . 259
§62. Ley de Hubble . . . 262
§63. Métrica de Robertson–Walker . . . 263
§64. Cosmología observacional . . . 267
§65. Ecuaciones de Friedmann . . . 269

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

§66. Modelo estándard de Friedmann 271
§67. Modelos de polvo con $\Lambda \neq 0$ 276
§68. Historia térmica del universo 280
§69. Origen de la estructura a larga escala 285
§70. Materia oscura 292
§71. Inflación 294
§72. Energía oscura 299
§73. El destino del universo 301

Apéndice: GNU Free Documentation License **305**
§74. Applicability and Definitions 306
§75. Verbatim Copying 307
§76. Copying in Quantity 307
§77. Modifications 308
§78. Combining Documents 311
§79. Collections of Documents 311
§80. Aggregation With Independent Works 311
§81. Translation 312
§82. Termination 312
§83. Future Revisions of This License 312

Índice de autores **315**

Índice alfabético **317**

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Índice de figuras

I.1. Radiación electromagnética recibida en la superficie de la tierra 18
I.2. Hierofanía en la pirámide de Kukulkan 24
I.3. Galaxia Andrómeda 28
I.4. Galaxia elíptica M87 29
I.5. Mapeo de galaxias del CfA 31
I.6. Proyección de Hammer–Aitoff de la tierra 32
I.7. Mapa del cielo en radiación óptica 33
I.8. Mapa del cielo en rayos–X 34
I.9. Mapa del cielo en rayos–γ 35
I.10. Mapa del cielo en infrarrojo 36
I.11. Mapa del cielo en milimétrico. 38
I.12. Fluctuaciones de la radiación milimétrica. 39
I.13. Mapa del cielo a 408 MHz 40
I.14. Paralaje astronómico 41

II.1. Movimientos superlumínicos en astrofísica 55
II.2. Diagrama espacio–tiempo de movimiento superlumínico de dos fuentes en astrofísica 56
II.3. Cono de luz en el espacio–tiempo. 63

IV.1. Integral del tensor energía–momento en un volumen del espacio–tiempo . 100
IV.2. Flujo a través de una superficie infinitesimal 103

V.1. Supernova 1054 observada por Teotihuacanos 143

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

V.2. La nebulosa del cangrejo 144
V.3. Modelo de un pulsar 152
V.4. Superficies equipotenciales de un sistema binario 157
V.5. Acreción de un gas en rotación hacia un objeto condensado 164

VI.1. Elevador de Einstein y corrimiento al rojo gravitacional 183
VI.2. Elevador de Einstein y espacio curvo 186
VI.3. Transporte paralelo sobre geodésicas 208
VI.4. Métrica sobre la 2–esfera 216

VII.1. Variación del potencial gravitacional y centrifugo en un campo gravitacional Newtoniano 227
VII.2. Variación del potencial gravitacional y centrifugo en un campo gravitacional relativista 228
VII.3. Ejemplos de lentes gravitacionales 237
VII.4. Ergoesfera de un agujero negro en rotación 243
VII.5. Radio galaxia Cygnus A (3C 405) 247
VII.6. Líneas espectrales de un disco de acreción 251

VIII.1. 2dF Galaxy Redshift Survey 261
VIII.2. Cono de luz para el universo 265

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Prefacio

Éste documento fue escrito por Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx> (http://www.astroscu.unam.mx/~sergio).

Éstas notas de curso que yo escribí primeramente para el curso de "Gravitación Astrofísica" en el 2001 han sido modificadas y aumentadas para tener su forma actual basadas en el curso de "Astrofísica Relativista" que impartí en el 2003 y 2004. Estas clases fueron impartidas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Este escrito fue hecho utilizando LaTeX (http://www.tug.org). Todo el software utilizado fue software libre (http://www.gnu.org) corriendo en computadoras con arquitectura i386 con el sistema operativo Debian GNU/Linux (http://www.debian.org).

Diversas versiones de este documento (incluyendo las gráficas en colores -si es que estás viendo este documento en blanco y negro, así como exámenes del curso y demás) pueden encontrarse en http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/gravitacion. Todo este documento (excepto algunas imágenes en donde se menciona explícitamente lo contrario) es Copyright ©Sergio Mendoza y está basado en las ideas de libertad de Copyright para una mejor enseñanza y educación (ver la sección Copyright).

Cualquier sugerencia y correcciones sobre las notas será bienvenida para su inclusión.

Las horas, días, semanas, meses y años que pase escribiendo estas notas fui apoyado (y también soportado) inmensamente por todos los miembros de mi familia, desde mis padres Sergio y Maricela hasta todos mis hermanos, Marisela, Adrián, Arturo, Roberto, Isabel y Ricardo. Aunque quizás nunca se hayan percatado, su presencia en algún momento durante este tiempo fue muy valiosa para hacerme aclarar mis ideas y darme fortaleza para poder concluirlas.

Los comentarios y criticas (en ocasiones bastante severas) hechas por mis estudiantes Juan Carlos Hidalgo, Cesar Lopez, Hugo Olivares, Martín Huarte, Eliu Huerta, Luis Torres y Yetli Rosas fueron absolutamente indispensables para poder continuar y mejorar estas notas.

Finalmente quiero mencionar que cada vez que observo estas notas pienso que debe haber más material por agregárseles. Esto es semejante al sentimiento de la investigación misma: ¡nunca termina! Sin embargo, estas notas tienen que tener un final, sobre todo

porque su finalidad es las de un curso en un semestre impartido en tres horas semanales, durante 12 semanas.

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>
http://www.astroscu.unam.mx/~sergio
Instituto de Astronomía
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
Distrito Federal
México
Última Modificación: Dom Ene 15 21:05:49 UTC 2006

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Copyright

Copyright © 2001 Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx> (http://www.astroscu.unam.mx/~sergio). Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, with no Front-Cover Texts, and with no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section (appendix) entitled "GNU Free Documentation License".

Note that some images in this document might not satisfy the requirements of the GNU Free Documentation License. Please see their individual Copyrights or contact directly the creators of those images.

For information about the Free Software Foundation and/or GNU, visit: http://www.gnu.org. The "GNU Free Documentation Licence" can be obtained in: http://www.gnu.org/licenses/licenses.html#FDL

This document is available for download in its original format in the following URL: http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/gravitacion.

Copyright © 2001 Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx> (http://www.astroscu.unam.mx/~sergio). Se otorga permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU (GNU Free Documentation Licence), Versión 1.2 o cualquier otra versión mas reciente publicada por la Fundación de Software Libre (Free Software Foundation); con no Secciones Invariantes (Invariant Sections), con no Textos de la Cubierta Frontal (Front-Cover Texts) y con no Textos de la Cu-

bierta Trasera (Back-Cover Texts). Una copia de la licencia se incluye en la sección (apéndice) bajo el título "GNU Free Documentation Licence".

Nótese que algunas imágenes en este documento pueden no satisfacer los requerimientos de la "GNU Free Documentation License". En caso de dudas, favor de verificar los Copyrights individuales de cada imagen o contactar directamente a los creadores de las mismas.

Para información sobre la Free Software Foundation y/o GNU, visitar: `http://www.gnu.org`. La "GNU Free Documentation Licence" puede ser obtenida en: `http://www.gnu.org/licenses/licenses.html#FDL`

Este documento puede ser encontrado en su forma original en el siguiente URL: `http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/gravitacion`.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Agradecimientos

Un enorme agradecimiento va dirigido a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la Universidad Nacional Autónoma de México por darme apoyo en el proyecto IN119203-3 (años 2003-2006). Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) agradezco inmensamente su apoyo económico en el proyecto de instalación (año 2001) y el número 41443 (año 2002).

Siempre hay muchas personas que agradecer, pero quiero que esta sección se utilice para agradecer a la gente que ayude a contribuir al mejoramiento de estas notas. Así es que si alguien encuentra un error (por pequeño que sea) favor de avisarme y su nombre aparecerá aquí. A las personas que modifiquen este documento, les pido que agreguen sus nombres a la lista siguiendo el formato original y de todos aquellos que contribuyan en un futuro al mejoramiento del mismo.

✻ Sergio Mendoza (2001). ➜ <sergio@astroscu.unam.mx> URL: `http://www.astroscu.unam.mx/~sergio`. Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Distrito Federal, México. Creador original. Agradezco a las siguientes personas por sus correcciones:

(I) *Juan Carlos Hidalgo* (2003). Estudiante de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. Correcciones tipográficas y de algunas ideas.

(II) *Cesar Lopez y Hugo Olivares* (2003). Estudiantes de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. Correcciones tipográficas y de ideas sobre todo en al parte relacionada a soluciones autosimilares a la envolvente de una supernova.

(III) *Martín Huarte* (2004). Estudiante de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. Correcciones tipográficas y de algunas ideas, sobre todo en la parte relacionada con jets astrofísicos.

(IV) *Lirio Aparicio* (2004). Estudiante del Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México. Algunas correcciones tipográficas y pequeños errores en el análisis dimensional de Planck.

(V) *Eliu Huerta y Luis Torres* (2004). Estudiantes de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. Muchas correcciones tipográficas, así como

detalles técnicos principalmente en la parte de acreción (Eliu) y en la parte de cosmología (Luis).

(VI) *Yetli Rosas* (2005). Estudiante de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. Correcciones tipográficas y algunos detalles en la parte de gravitación relativista.

(VII) *Juan Carlos Hidalgo* (2006). Estudiante de Queen Mary, Universidad de Londres, Reino Unido. Correcciones tipográficas.

(VIII) *María Isabel Mendoza* (2006). Estudiante de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. Correcciones tipográficas.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Dedicado a todos aquellos que observando el cielo
encuentran en las leyes de la naturaleza,
la motivaciön para el andar diario.

Capítulo I

Introducción a la astrofísica

La astronomía es una de las ramas de la ciencia más antiguas que existen. Nuestros detectores naturales (ojos) nos permiten captar sólo una parte importante del espectro electromagnético: la radiación *óptica*. La atmósfera terrestre es tal que filtra casi toda la radiación electromagnética proveniente del cosmos. Solamente existen dos ventanas en el espectro electromagnético a través de las cuales la radiación se transmite: las frecuencias de radio y óptico. Es maravilloso que nuestros ojos puedan detectar una de las radiaciones provenientes del universo a través de la ventana del óptico. La Figura I.1 muestra la radiación que es posible observar desde la superficie terrestre. Diversas civilizaciones en el pasado desarrollaron una inmensidad de observaciones y así pudieron hacerse preguntas tales como: ¿Qué son esos puntos blancos (*estrellas*) que se mueven de este a oeste en el cielo? ¿Cuál es la periodicidad de estos mismos? ¿Qué más hay aparte de las estrellas en el universo? ¿De dónde provenimos? ¿Cual es nuestro destino? Todas estas preguntas y más se originaron muy probablemente al observar el cielo nocturno, la luna y las estrellas brillantes del mismo. Hoy en día seguimos haciéndonos estas preguntas y gracias a los avances de la física podemos contestar con certeza algunas de estas.

§1. Historia

De acuerdo a las historias de la primer civilización que apareció en el globo terrestre, Mesopotamia, una montaña cósmica se formó en el mar, hecha de la perfecta no diferenciación del dios del cielo, llamado Anu y la diosa de la tierra llamada Ki. Anu y Ki dieron

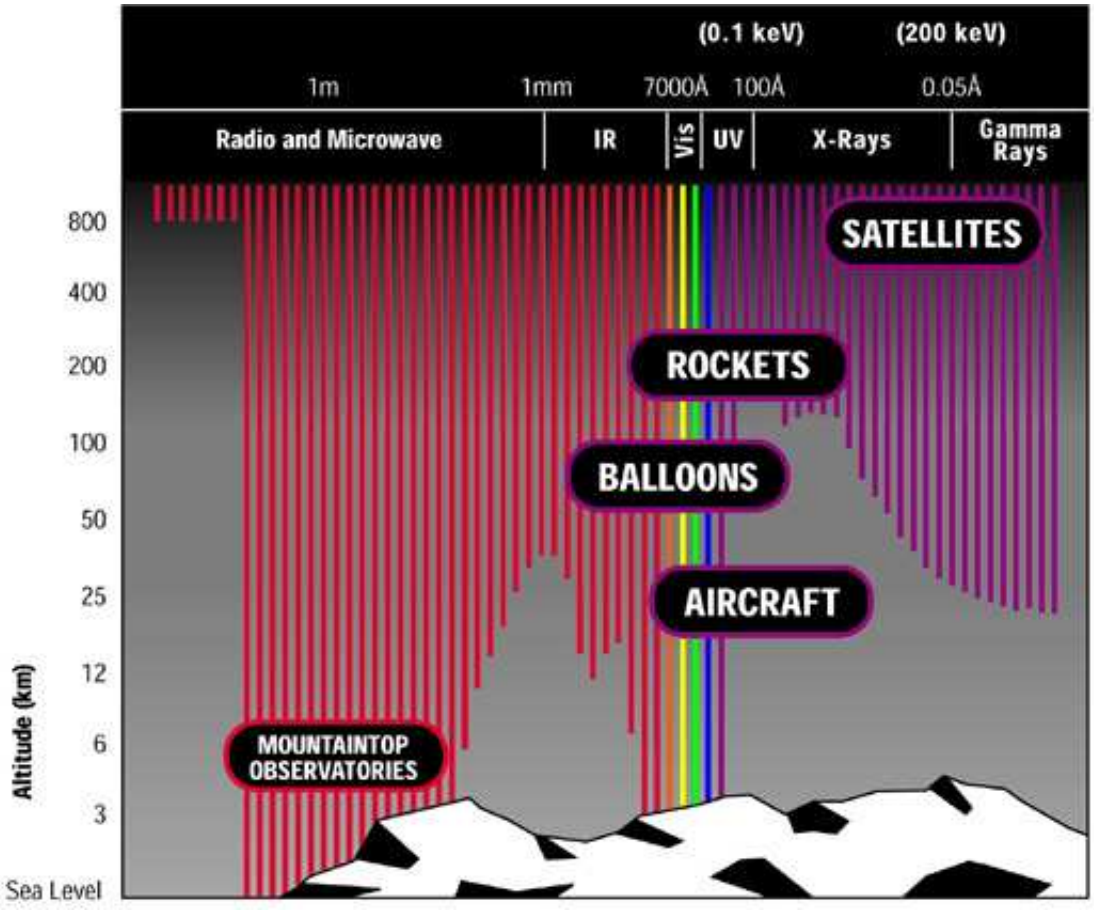

Figura I.1: La radiación electromagnética es absorbida por la atmósfera terrestre. La figura muestra la penetración de la radiación electromagnética en la atmósfera terrestre como función de la altura sobre el nivel del mar. Ésta imagen fue tomada del sitio de internet del *Chandra X–ray observatory* en `http://chandra.harvard.edu/xray_astro/absorption.html`. Los créditos de la imagen son de NASA/CXC/SAO.

nacimiento a Enlil, el dios del aire y la tormenta. Este nacimiento produjo la separación entre la tierra y el cielo. Anu, el padre, cargaba el cielo, mientras que Enlil, el hijo cargaba a la tierra: su madre. El dios de la luna, llamado Sin fue el hijo de el dios del aire y otra diosa de la tierra llamada Ninlil. Junto con su madre y la ayuda de Enki, el dios del agua, Enlil produjo plantas y animales. Hombres y mujeres fueron procreados mediante la unión de la diosa del mar Nammu, la diosa de la tierra Ki y el dios del agua Enki. El dios del

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

sol, Utu y la diosa Venus Inanna son los hijos del dios de la luna.

Esta es la versión más antigua (~ 2500 AC) de la creación según los Mesopotamios. La continua observación del cielo llevó a ésta y a muchas más civilizaciones a crear historias sobre los orígenes del universo.

La idea de tener una diferenciación entre el cielo y la tierra fue concebida por algunas civilizaciones. Otras más, como los mesoamericanos les consideraban como un mismo objeto: cielo y tierra eran una misma entidad.

Los somarios, la civilización al sur de Mesopotamia (en lo que ahora sería Kuwait) y más o menos contemporánea a la misma, eran astrónomos expertos. Inventaron la unidad del grado como una medida angular y gustaban del sistema sexagesimal, además de que 360 era casi el número de días del año.

Los griegos comenzaron a tener importantes astrónomos alrededor del siglo IV AC. Fue Hicetas de Siracuse quien, para explicar el movimiento aparente de las estrellas, enseño a sus estudiantes que la tierra estaba girando alrededor de su propio eje. Más tarde Aristarcus de Samos en el siglo tercero AC creía que el sol era el centro del universo y que había objetos como la tierra que rotaban alrededor del sol, junto con la tierra. La luna era la excepción y rotaba alrededor de la tierra. Aristarcus formuló la hipótesis de que la razón por la cual la luna mostraba solamente la mitad de un circulo en media luna era porque el sol, la luna y Aristarcus formaban un triángulo rectángulo. De esta manera, Aristarcus concluyo que el sol estaba veinte veces más alejado de la tierra que lo que la luna lo estaba (de hecho, el resultado correcto es de 400 veces). Ésta fue quizás la primer medición extraterrestre en la historia del hombre.

Eratóstenes, el bibliotecario real de la biblioteca de Alejandría en el siglo II AC, sabía que en Siena (la ciudad Egipcia que ahora corresponde a Asuán) existía un poso seco que tenía la propiedad de que en el solsticio de verano al medio día no se producía sombra en su parte interior. Esto se debe a que Asuán se localiza justamente en el trópico de Cáncer y por lo tanto el sol se encuentra justo en el zenit (o el punto central en el cielo) en el solsticio de verano. En uno de los solsticios de verano, Eratóstenes midió la sombra producida por una vara alta al colocarla de manera vertical en Alejandría y calculó el ángulo producido por la distancia de Siena y Alejandría ya que éstas están básicamente a la misma longitud. Eratóstenes calculo la distancia entre Alejandría y Siena utilizando como base el tiempo que se tardaba un camello en recorrer ambas ciudades. Así el bibliotecario de Alejandría

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

pudo calcular el radio de la tierra y falló tan sólo por 5 % del valor aceptado actualmente.

Hiparcus trabajó en la isla de Rodas en el siglo II AC. Él construyó un sistema geocéntrico que permitía predecir la posición de las estrellas y los planetas con la precisión suficiente para cualquier viaje en alta mar. Hiparcus descubrió la precesión de los equinoccios debida a la precesión periódica (con un periodo de 26 000 años) de la tierra sobre su propio eje de rotación.

En el siglo II DC, Claudius Ptolomeo sistematizó la trigonometría y con ello fue posible la construcción de varios mapas de manera precisa. De hecho Ptolomeo trabajó bastante en dibujar mapas con excelente precisión de todo Europa, parte de África e India.

El cristianismo oscureció todas las ideas de los griegos y las ideas de que la tierra era plana resurgieron fuertemente. No fue sino hasta que en el siglo XVI Nicolás Copérnico intentó simplificar el sistema epicíclico de círculos concéntricos diseñado por Hiparco, que las cosas comenzaron a cambiar. Copérnico tenía acceso a diversos manuscritos de la antigua Grecia y así tuvo la oportunidad de revolucionar el pensamiento de su época. Él propuso que todos los planetas, incluyendo a la tierra, giraban alrededor del sol (teoría *heliocéntrica*).

En el siglo XVI, el último de los astrónomos que utilizaron solamente sus ojos para realizar sus observaciones, Tycho Brahe, era patrocinado por el rey de Dinamarca. A la muerte del rey, Tycho Brahe se mudó a Praga y contrató de asistente a Johannes Kepler. A diferencia de Tycho Brahe, quien creía en la teoría geocéntrica del universo, Kepler siguió los pasos de Copérnico y con las ideas de la teoría heliocéntrica del universo y utilizando las observaciones de Brahe construyo tres leyes fundamentales del movimiento de los planetas alrededor del sol. Años más tarde y bajo un intenso trabajo teórico, Isaac Newton en Cambridge Inglaterra fue capaz de explicar las leyes de Kepler a partir de su teoría de gravitación universal.

En el siglo XVII, Edmund Halley adivinó de manera correcta que la trayectoria parabólica de los cometas era quizás una elipse excesivamente elongada y por lo tanto, debería existir una periodicidad por la cual estos objetos aparecen en el cielo. Su predicción no fue confirmada sino hasta después de su muerte. El famoso cometa Halley lleva su nombre y es observado cada 76 años aproximadamente.

En el siglo XIX se realizaron tres trabajos que sin lugar a dudas dieron los fundamentos a la astronomía moderna. El primero de ellos fue en 1838, cuando Friedrich Bessel

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

reportó la medición del paralaje trigonométrico de la estrella 61–Cygni. Más adelante, en este capítulo analizaremos los conceptos de paralaje trigonométrico para encontrar la distancia a diversas estrellas utilizando estrellas fijas en el campo de fondo de visión y el movimiento de traslación elíptico de la tierra alrededor del sol. Para el año 1900 se tenían registrados alrededor de cien paralajes de estrellas cercanas. Con esto quedo claro que las estrellas en el firmamento eran objetos semejantes al sol. El segundo paso fue dado por Gustav Kirkchhoff, quién en los 1850s observó 30 diferentes elementos químicos en el sol identificando las líneas de absorción que se presentaban en su espectro electromagnético. Durante este siglo, el catalogar líneas espectrales fue una de las tareas más fuertes llevadas acabo. Gracias a esto se pudo tener un amplio conocimiento de la estructura estelar durante los principios del siglo XX. Finalmente, gracias al invento de la placa fotográfica en 1839 la astronomía dio un giro tremendo. Fue el británico William Herschel quién tomó las primeras fotografías utilizando el telescopio de su padre. Con esto, Hershel descubrió el planeta Urano y los asteroides. Catalogó alrededor de 2000 nebulosas y descubrió varios satélites de Urano y Saturno. También descubrió la existencia de estrellas binarias. Fue justamente en el siglo XIX cuando la combinación de fotografía y la espectroscopia lo que dio origen a la rama de la física conocida como la astrofísica.

§2. Astronomía en Mesoamérica

No quiero continuar sin antes mencionar la importancia que tuvo para nuestros antepasados en Mesoamérica el desarrollo astronómico. Antes que nada, es importante aclarar que estas observaciones se realizaron con ayuda de los ojos e instrumentos para marcar ciertas posiciones de los astros. Con el paso de los siglos y haciendo observaciones precisas se opto por amalgamar la astronomía con construcciones formando lo que hoy en día se denomina arqueo–astronomía.

Una de las razones por las cuales se conoce el alto nivel de observación astronómica en mesoamérica es debido a la creación de calendarios, como el calendario Maya. Este calendario está dividido en tres categorías: *tzolkins* que son los años sacros o naturales. Éstos están compuestos por 13 periodos (meses) de 20 días cada uno. Los *haabs* que son los años solares poseen 18 meses de 20 días cada uno. Se siguen de una cuenta especial de cinco días que se llamaban *uayeb* en donde se representaban diversas festividades. También

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

los Mayas dividían su calendario en unidades de 20, 360, 7200 y 144000 días. A esta última se le denominó la cuenta larga. Las dos primeras divisiones fueron hechas por todas las civilizaciones de México. Las dos primeras cuentas coinciden cada 52 años, que se celebraba con una fiesta grande. La cuenta larga permitió a los Mayas escribir el día de la creación: el 13 de agosto del año 3114 AC.

Existen algunos juegos calendarios que fueron de suma importancia para los mesoamericanos. Por ejemplo, los teotihuacanos tenían como días especiales el 29 de abril y el 13 de agosto. En estos días la pirámide del sol se alinea con el disco solar (y esto mismo sucede con una gran cantidad de monumentos prehispánicos en mesoamérica). Esto se debe a lo siguiente. A partir del 29 de abril el observador tiene que esperar un intervalo de 52 días para llegar al solsticio de verano (21 de junio). Cincuenta y dos días más tarde se llega al 13 de agosto. Esta última fecha indica el comienzo del calendario solar de 365 días. Cuando la alineación solar sucede en dirección opuesta a la de las estructuras anteriores, se obtienen fechas de gran importancia que corresponden al 12 de febrero y el 29 de octubre. En estas fechas, se observan diversos alineamientos con el sol al amanecer. Existen otras dos parejas de números que utilizaron los mesoamericanos: el 9 de abril con el 2 de septiembre y el 4 de marzo con el 9 de octubre. Por ejemplo, el templo mayor de Tenochtitlan en la Ciudad de México, que está orientado al poniente, se alinea con el disco solar el 9 de abril y el 2 de septiembre. Justamente el 9 de abril y el 2 de septiembre dividen al año solar en una proporción de 2/3. En otras palabras, después de la primera alineación en el año, 73 días más tarde se llega al solsticio de verano y la segunda alineación ocurrirá 73 días posteriores a esto. A partir de esta alineación se tiene que esperar 3 veces 73 días ($= 219$ días) para que con la siguiente alineación se complete el año solar. El número 73 es un número fundamental para las culturas mesoamericanas. Por ejemplo, en el calendario solar de 365 días y el calendario corto de 260 días coincidían en un intervalo de 52 años solares como se mencionó anteriormente. Esto ocurre justamente cuando el calendario corto de 260 días ha dado exactamente 73 vueltas. Por si fuera poco, el *periodo sinódico* (tiempo que tarda un objeto en completar una órbita sobre la bóveda celeste) del planeta Venus es de 584 días que se obtiene de acumular 8 periodos de 73 días. Por ejemplo, en el templo mayor debido a que la altura de su horizonte hacia el oriente es muy parecida a la del poniente, se obtienen alineaciones maravillosas al salir el sol y al ocultarse. Las fechas de alineación del templo mayor, que ocurren el 4 de marzo y el 9 de octubre, dividen de forma igual al

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

año de 365 días en un intervalo de 2 veces 73 y 3 veces 73 en relación al solsticio de invierno respectivamente. Esta posición este–oeste elegida con gran precisión para que estos alineamientos ocurrieran en el Templo Mayor de Tenochtitlan fueron escogidas premeditadamente. Esto pone en tela de juicio la leyenda Mexica de haber encontrado un águila devorando una serpiente sobre un nopal en el islote del lago de Texcoco que representaba la señal divina para construir la futura ciudad de Mexico Tenochtitlan. En otras palabras, todo parece indicar que el lugar para construir esta ciudad fue escogido de manera muy precisa, basándose en mediciones astronómicas.

Podríamos seguir analizando diversas construcciones como el observatorio del Caracol construido por los Mayas y no acabaríamos. Sin embargo, quiero concluir mencionando la existencia de observatorios solares en diversos lugares, en donde se presenta una orientación astronómica conocida como la *hierofanía*: la iluminación de lo sagrado. Esto es un juego de luz y sombra que muestra el poder de los astrónomos mesoamericanos. Quizás el más famoso de todos éstos es el que ocurre en la pirámide de Kukulkan en Chichén Itza. En los atardeceres de los equinoccios de primavera y otoño (y de hecho por alrededor de una semana antes y después de estas fechas), los nueve cuerpos de la pirámide proyectan una sombra sobre la balaustrada de la escalinata norte, con lo cual se forma el cuerpo luminoso de una serpiente cuya cabeza de piedra se encuentra en la base de la balaustrada como lo muestra la Figura I.2. Esto representa el descenso hacia la tierra del dios Kukulcán o Quetzalcóatl en forma de serpiente de luz. Pero la hierofanía se presenta también en otros lugares como en Malinalco donde los rayos solares a medio día del equinoccio alumbran a la serpiente Huitzilopochtli en su descenso a la tierra.

§3. Astrofísica relativista

Hoy en día no es posible encontrar una marcada diferencia entre la astronomía y la física. En el pasado, cuando los astrónomos solamente se interesaban por movimientos del cielo, los físicos prestaban poca atención a los fenómenos del universo. La situación cambió radicalmente desde que se comenzaron a realizar observaciones en frecuencias de radio desde la tierra y en el espacio en otras longitudes de onda, con el uso de satélites. Al estar en el espacio, y así deshacerse de la capa de la atmósfera, se reciben señales provenientes incluso de de rincones lejanos del universo. Esta información es recibida como

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Figura I.2: La figura muestra la hierofanía que se presenta cerca de los equinoccios de primavera y otoño en la pirámide de Kukulkan de Chichén Izta. El cuerpo luminoso de la serpiente es evidente gracias a la proyección de los nueve cuerpos de la pirámide en la escalinata. Esta imagen fue tomada del servidor proton de la Universidad de Guadalajara en `http://proton.ucting.udg.mx/temas/conozca/hijo/chichen11.html`.

radiación electromagnética y como flujos de partículas (electrones, protones, neutrinos, etc.). A finales de la primera década del siglo XXI estarán listos diversos experimentos, unos en órbita alrededor de la tierra, otros sobre la tierra, que intentarán explorar no solamente los flujos de radiación y de partículas que hasta ahora hemos observado. Estos experimentos servirán para la observación de ondas gravitacionales producidas por fenómenos altamente energéticos, como el amalgamiento de dos agujeros negros, el orbitar de una estrella de quarks alrededor de un agujero negro, etc.

Albert Einstein a principios del siglo XX modificó la forma de entender la dinámica del movimiento descrita por Isaac Newton en el siglo XVII. Esta teoría, la llamada *teoría especial de la relatividad* cambió considerablemente todos nuestros conceptos de observación de las leyes del universo. Einstein formuló esta teoría de manera teórica. A la fecha, esta teoría ha pasado todas las pruebas experimentales a las que ha sido sometida. Diez años después de la creación de la teoría especial de la relatividad, Einstein formuló una teoría gravitacional basada en su teoría especial. Él mismo la denominó, la *teoría general de la relatividad*.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Einstein era una persona muy modesta y solía decir que si el no hubiera formulado la teoría especial de la relatividad, en unos cuantos años alguien más lo hubiera hecho. Sin embargo, cuando construyó su teoría general, dijo también lo mismo, pero en vez de unos cuantos años dijo que hubiera tardado alrededor de unos sesenta años. Curiosamente, esto coincide con el renacimiento de la gravitación en la década de los 1960s y el surgimiento de la astrofísica relativista como una de las ramas más sólidas de la física.

Unos meses después de la publicación de la teoría de la relatividad general, Karl Schwarzschild, quien servía a las fuerzas armadas alemanas en el frente ruso durante la primera guerra mundial, formuló la primer solución a las ecuaciones de Einstein: la solución de la gravedad producida por una distribución de masa esférica, como la de una estrella.

En la segunda década del siglo XX, el joven meteorólogo, Alexander Friedman encontró soluciones a la dinámica del universo utilizando la teoría general de la relatividad de Einstein. Sus soluciones mostraron un universo dinámico (i.e. con movimiento), por lo que Einstein mismo introdujo una constante antigravitacional (la famosa *constante cosmológica*) en las ecuaciones de campo para obtener un universo estático. Mas tarde, con los descubrimientos de Edwin Hubble, donde se mostraba un universo en movimiento, Einstein aceptó su error y lo denominó el error más grande de toda su vida.

En los 1930s el joven de 19 años, Subrahmayan Chandrasekhar, durante un viaje en barco de India a Inglaterra investigó la posibilidad de mezclar las ideas de la teoría especial de la relatividad con las ideas de la fresca teoría cuántica, así como sus conocimientos de astronomía. De esta manera predijo la existencia de estrellas pequeñas ($\sim$ 1000 km) denominadas hoy en día como *enanas blancas*. De la misma manera, para finales de la década de los 1930s, después de anunciarse el descubrimiento del neutrón, el joven Lev Davidovich Landau (el último físico que dominó absolutamente todas las ramas de la física teórica) idealizó otro tipo de estrellas similares a las enanas blancas, pero formadas principalmente por neutrones. Estas estrellas se denominan hoy en día como *estrellas de neutrones*.

La época de oro de la astrofísica relativista se llevó acabo en la década de los 1960s, cuando en tres países, Inglaterra, la Unión Soviética y los Estados Unidos de América se formaron tres de los grupos más famosos en la historia de la física. Por la parte Inglesa, Dennis Sciama en Cambridge formó su grupo junto con sus estudiantes Stephen Hawking, Roger Penrose, Martin Rees y Joseph Silk entre otros. Por la parte Soviética, Yakov Bo-

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

risovich Zel'dovichZel'dovich, Yakov Borisovich, uno de los educados por Lev Davidovich Landau, y que tuvo que ver con la construcción de la bomba de hidrógeno, formó su grupo con Igor Novikov y Andrei Doroshkevich entre otros. Este grupo soviético ha sido el grupo más fuerte y sólido en toda la historia de la astrofísica relativista. Su producción fue grandiosa. Por la parte Americana, en Princeton, John Wheeler, quien fuera estudiante de Albert Einstein, junto con sus estudiantes Kip Thorne, Charles Misner y otros, formaron el tercer gran grupo de astrofísica relativista. Hoy en día diversos grupos se han derivado de estos tres y todos, de una u otra manera están influenciados por el trabajo y las ideas que estos primeros grupos desarrollaron.

§4. Constituyentes básicos del universo

El *sistema solar* representa nuestro vecindario. Está constituido por una estrella, el *sol* y diez planetas. Nosotros estamos en el tercer planeta, contando desde el sol hacia afuera. Existe un *cinturón de asteroides* entre Marte (el cuarto planeta) y Júpiter (el quinto planeta). Todos los planetas giran alrededor del sol en órbitas que se desvían ligeramente de círculos. Existe una precesión notable del planeta Mercurio (el primer planeta) sobre su propio eje (~ 52 arcsec/siglo) que se debe a efectos relativistas producidos por el sol y Mercurio en el espacio–tiempo. Saturno (el cuarto planeta en la lista) se encuentra diez veces más lejos de la tierra que la distancia tierra–sol. Además de planetas y asteroides, existe gas (principalmente Hidrógeno) de baja densidad entre cada planeta. También existen campos magnéticos y se encuentran partículas que se mueven a velocidades relativistas que cruzan el sistema solar. Estas partículas, denominadas *rayos cósmicos*, fueron producidas y aceleradas en el centro de agujeros negros supermasivos o en explosiones supernovas.

Las estrellas cercanas a nosotros son estrellas rojas frías, que se parecen mucho a nuestro sol, quién por cierto es tan sólo una estrella típica, común y corriente. Las masas (m) de estas estrellas cercanas tienen valores en el rango de $2\,M_\odot \lesssim m \lesssim 10\,M_\odot$, en donde el símbolo $M_\odot$ representa la masa del sol. La estrella más cercana, Alfa Centauri, se encuentra a una distancia de la tierra de $\sim 30\,000$ veces más grande que la distancia Tierra–Júpiter. De hecho esta estrella se encuentra a 4.3 años–luz de distancia de la tierra [†]. La densidad

[†]Un año–luz es la distancia que recorre la luz (que viaja a $\sim 300\,0000$ km/s) durante un año. Como referencia, siempre es útil saber que la distancia tierra–sol es de 8.3 minutos–luz.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

de estrellas en nuestro alrededor es aproximadamente de 50 estrellas por $\sim$ 17años–luz cúbicos, centrados alrededor del sol.

La *galaxia* (o nuestra galaxia, la *vía láctea*) es un conglomerado de estrellas con tamaño $\sim 20\,000$ veces más grande que la distancia tierra–sol. Nuestra galaxia tiene forma espiral, similar a la galaxia de Andrómeda que se muestra en la Figura I.3, y contiene $\sim 10^{11} = 100\,000\,000\,000$ estrellas. Existe un problema esencial en el estudio de la galaxia. No es fácil observar su forma pues estamos dentro de la misma. Esto es similar al problema de mapear un laberinto complicado una vez que uno está dentro del mismo. Preguntas que parecerían tan simples como ¿donde se encuentra el centro de la galaxia? no son simples de contestar. Sin embargo se puede dar una buena aproximación observando los movimientos de las estrellas de nuestra galaxia.

En 1926, el astrónomo Edwin Hubble mostró que los objetos como la nebulosa de Andrómeda eran como islas de estrellas en el universo, similares a nuestra galaxia. Las galaxias fueron clasificadas por Hubble en dos esquemas principales: *espirales* (como Andrómeda) y *elípticas* (galaxias esferoidales) como Virgo–A que se muestran en la Figura I.4. Finalmente, galaxias que no parecen elípticas ni espirales se denominan *irregulares*. La distribución de luz en las galaxias elípticas es suave, no contienen barras ni discos centrales. Mas adelante hablaremos de esta clasificación y su importancia a nivel cosmológico. Las galaxias constituyen los cimientos fundamentales del universo, es decir, éstas forman los pilares esenciales de la estructura del universo.

Existen galaxias que dan origen a los fenómenos más energéticos del universo y aunque su clasificación cae dentro de los géneros descritos por Hubble, han sido también catalogadas de otra manera. Estas galaxias se denominan genéricamente como Núcleos Activos de Galaxias (NAG) y en ocasiones aparecen como objetos estelares en placas fotográficas. Por esta razón son en ocasiones denominados objetos cuasi–estelares o *cuasares*. Estos cuasares y sus primos relativos más energéticos los *blazares* son los objetos más energéticos del universo que conocemos.

Las galaxias en el universo se encuentran concentradas en lo que se conoce como *cúmulos de galaxias*. Estos cúmulos son las estructuras amarradas de forma gravitacional más grandes que conocemos en el universo. En ocasiones, estos cúmulos llegan a tener unos cuantos miles de galaxias en su interior. Tamaños típicos de estos cúmulos son del orden de 50 veces el tamaño de la galaxia. La mayoría de las galaxias no se encuentran en cúmulos

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Figura I.3: Imagen de nuestra galaxia vecina Andrómeda, también conocida como M31 o NGC 224 dependiendo del catalogo donde ha sido observada. Esta galaxia se parece mucho a la nuestra, solo que es ligeramente más grande. La imagen es Copyright de Robert Gendler y fue obtenida de `http://www.robgendlerastropics.com`.

de galaxias. Éstas se encuentran como objetos aislados en el universo.

La distribución de las galaxias en el universo resulta importante para analizar la estructura a gran escala del mismo. Resulta que las galaxias se encuentran distribuidas en una manera un tanto cuanto aleatoria, es decir, no es uniforme en escalas que van más allá de las escalas de cúmulos galácticos. Al mapear todas las galaxias visibles en un mapa, se observan agujeros (regiones sin galaxias), filamentos y planos (estos últimos dos, son estructuras formadas por galaxias). La Figura I.5 representa las observaciones hechas por el Center for Astrophysics (CfA) de la Universidad de Harvard. Nuestra propia galaxia se encuentra en el centro del diagrama y la bóveda celeste ha sido mapeada dentro del círculo que se observa en la figura. En el diagrama se observan varias líneas radiales for-

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Figura I.4: Imagen óptica de la galaxia elíptica M87 (NGC 4486), mejor conocida como Virgo–A. La imagen es Copyright de Robert Gendler y fue obtenida de `http://www.robgendlerastropics.com`.

madas por galaxias que apuntan hacia nuestra galaxia. Estas líneas son representaciones de la existencia de un cúmulo de galaxias. Todas las galaxias en estas líneas se encuentran amarradas gravitacionalmente y los miembros del cúmulo tienen dispersiones de velocidad suficientemente grandes, como para que se vea una disminución en su distancia radial, como consecuencia del efecto Doppler , a pesar de que se encuentran a la misma distancia. Estas líneas se denominan frecuentemente *los dedos de dios*. En la parte superior del diagrama, se observa también una cadena de galaxias grandes que cubre casi toda la región mapeada. Esta región se denomina la *gran pared*. Con este mapeo se obtiene una buena información sobre la topología del universo. Los resultados muestran que el universo tiene una estructura como la de una esponja. Las galaxias representan un pedazo de la esponja

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

y se encuentran unidas entre si por filamentos, pedazos más grandes. Además tienen entre sí pedazos vacíos que también están unidos entre sí, una característica de la topología de una esponja en tres dimensiones, que no poseen las esponjas de dos dimensiones. Finalmente, el tamaño del universo es alrededor de 50 veces el tamaño de los agujeros vacíos en el universo, como los que se muestran en el mapeo de las campanas. Cuando estudiemos cosmología, veremos a que nos referimos con el tamaño del universo y como se mide el mismo.

§5. Radiación de fondo

Una de las formas más útiles para entender el universo y sus constituyentes es analizar los mapas que se construyen con la radiación de fondo. Lo que se hace es mapear la radiación que se observa en la bóveda celeste, en un cierto intervalo de frecuencias (digamos en radio) y ponerlo en un mapa de dos dimensiones, similar a los mapas bidimensionales que representan el globo terráqueo. La proyección más utilizada para representar el globo terráqueo es la proyección de Mercator. El mapeo consiste en que cada punto sobre la esfera terrestre es mapeado a un plano de dos dimensiones finito (un rectángulo), de tal forma que las dimensiones cerca del ecuador son preservadas a consecuencia de que las escalas cerca de los polos se aumentan. Esta proyección no es la única posible. Existen diversas formas de mapear el globo terrestre. Una de ellas es conocida como la proyección Hammer–Aitoff que consiste en poner a los puntos de la superficie terrestre en una elipse de tal forma que las latitudes y longitudes se curven como lo muestra la Figura I.6. Al igual que en la proyección de Mercator, los países representados en los polos presentan distorsiones geométricas, mientras que los cercanos al ecuador aparecen correctamente. Este mapeo tiene la propiedad de que conserva el área. En otras palabras, un área de tamaño unidad es mapeada a un área de tamaño constante. Los astrónomos utilizan diversas modificaciones (dependiendo del experimento en cuestión) de la proyección Hammer–Aitoff que es una proyección de la bóveda celeste hacia una elipse donde se conservan (en ocasiones sólo aproximadamente) las áreas. La manera usual de mapear la bóveda celeste es la siguiente. Se escogen unas coordenadas denominadas *coordenadas galácticas* de tal manera que el plano de nuestra galaxia (vía–láctea) coincida con el ecuador en la proyección de Aitoff. El punto que corresponde al centro de la galaxia en la bóveda celeste es puesto en el centro

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

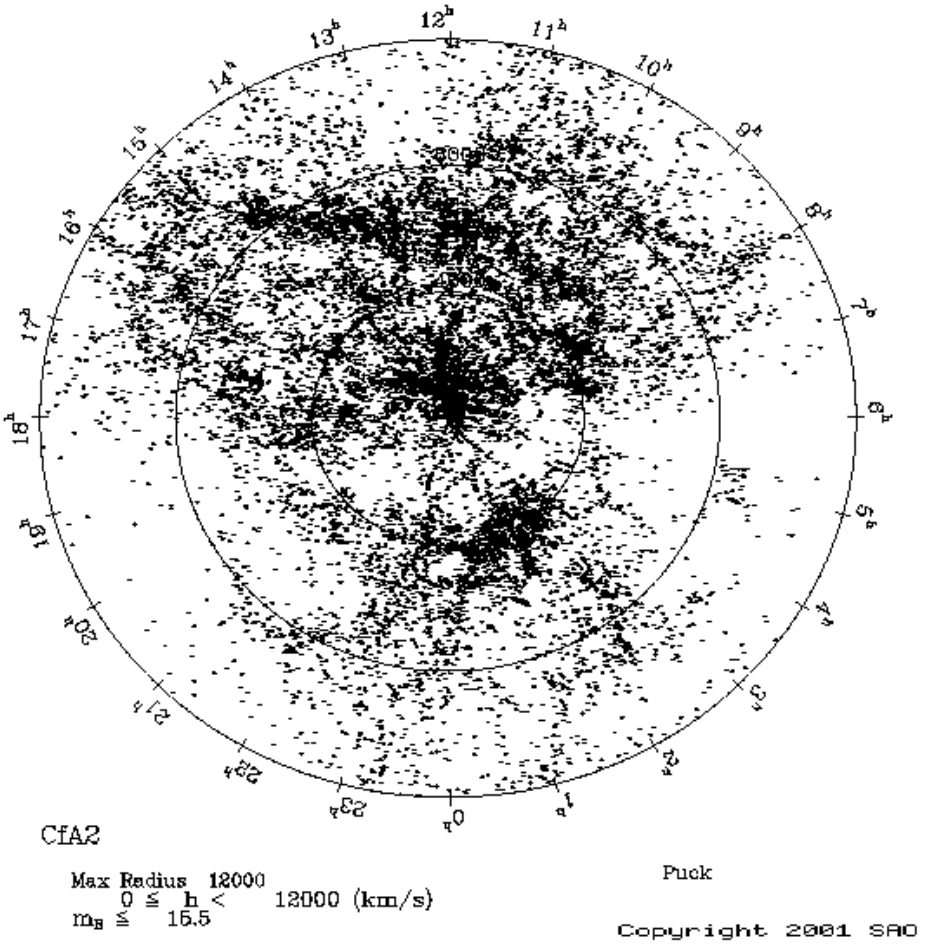

Figura I.5: Mapeo de todas las galaxias observables en la bóveda celeste. El mapeo fue hecho por el Harvard–Smithsonian Center for Astrophysics. La figura muestra las galaxias que se observan como función del corrimiento al rojo (i.e. distancia). La figura es una proyección polar del corrimiento al rojo (radio) como función del ángulo de asención en el plano del cielo. Ésta y otras imágenes semejantes se encuentran disponibles en `http://cfa-www.harvard.edu/~huchra/zcat`.

de la elipse. El polo norte galáctico y el polo sur galáctico son colocados en el polo norte y sur de la elipse respectivamente.

La Figura I.7 muestra como se ve el cielo en el intervalo de frecuencias óptico. Evidentemente lo que más resalta a la vista es la parte ecuatorial, donde se ve un gran manchón

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

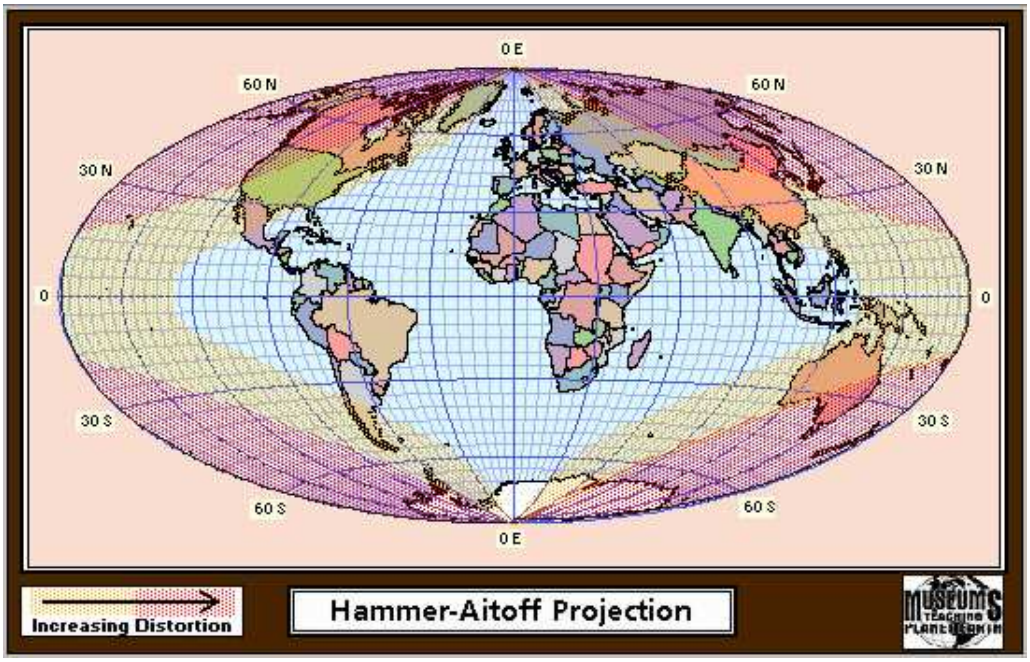

Figura I.6: La superficie de la tierra en un mapa elíptico. La proyección se denomina Hammer–Aitoff y el mapeo es tal que preserva áreas a costa de distorsionar el polo norte y sur, así como las regiones alejadas al este y oeste. El crédito de la imagen es de Dylan Prentiss del Department of Geography, University of California, Santa Barbara y fue obtenida de `http://earth.rice.edu/mtpe/geo/geosphere/topics/mapping/40_hammer.html`.

blanco. Este manchón lo produce el plano de nuestra propia galaxia, la famosa *vía–láctea*. Esta figura del cielo fue tomada de 51 fotos de ángulo ancho tomadas individualmente en California y Sudáfrica. Las imágenes fueron tomadas con una cámara fotográfica con un lente de 28 mm y una apertura del diafragma a f/4. El tiempo de exposición fue de 30 a 45 minutos por placa fotográfica. La mayoría de la luz que se observa en esta imagen se debe a estrellas y gas localizadas en el plano de nuestra galaxia que radian a temperaturas de entre $3\,000 - 10\,000\,\mathrm{K}$. En la figura se muestran las nubes de Magallanes pequeña y grande en la parte inferior derecha del plano galáctico.

Hacia el rango de altas energía, la Figura I.8, muestra la bóveda celeste en rayos–X. Debido a que los objetos que radian en rayos–X deben poseer temperaturas $\sim 10^7\,\mathrm{K}$, no existen tantos objetos en el plano galáctico. De hecho, casi toda la radiación proviene de

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Figura I.7: La figura muestra el panorama del cielo utilizando la proyección de Aitoff. El plano de nuestra galaxia (línea horizontal que cruza el centro de la elipse) muestra la vía láctea. En la parte inferior derecha de la figura se observan las nubes de Magallanes. La imagen fue tomada y es ©2000 Axel Mellinger (`http://home.arcor-online.de/axel.mellinger`).

objetos extragalácticos. Las fuentes de rayos–X galácticas son producidas esencialmente por dos mecanismos. El primero se debe a la producción de rayos–X debido al arrastre gravitacional por parte de una estrella sobre otra en un sistema binario. El segundo mecanismo de se debe a los remanentes de explosiones supernovas. Casi toda la emisión en rayos–X fuera del plano galáctico es producida por núcleos activos de galaxias a grandes distancias. También se observan algunos cúmulos de galaxias que contienen grandes cantidades de gas caliente en el espacio entre galaxias.

La Figura I.9 muestra la bóveda celeste en rayos-γ, la radiación más energética en el espectro electromagnético. Lo que muestra el mapa es que casi toda la radiación en esta frecuencia se encuentra en el plano galáctico. Esto se debe a la presencia de partículas con muy altas energías, que se mueven a velocidades cercanas a las de la luz entre las estrellas.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

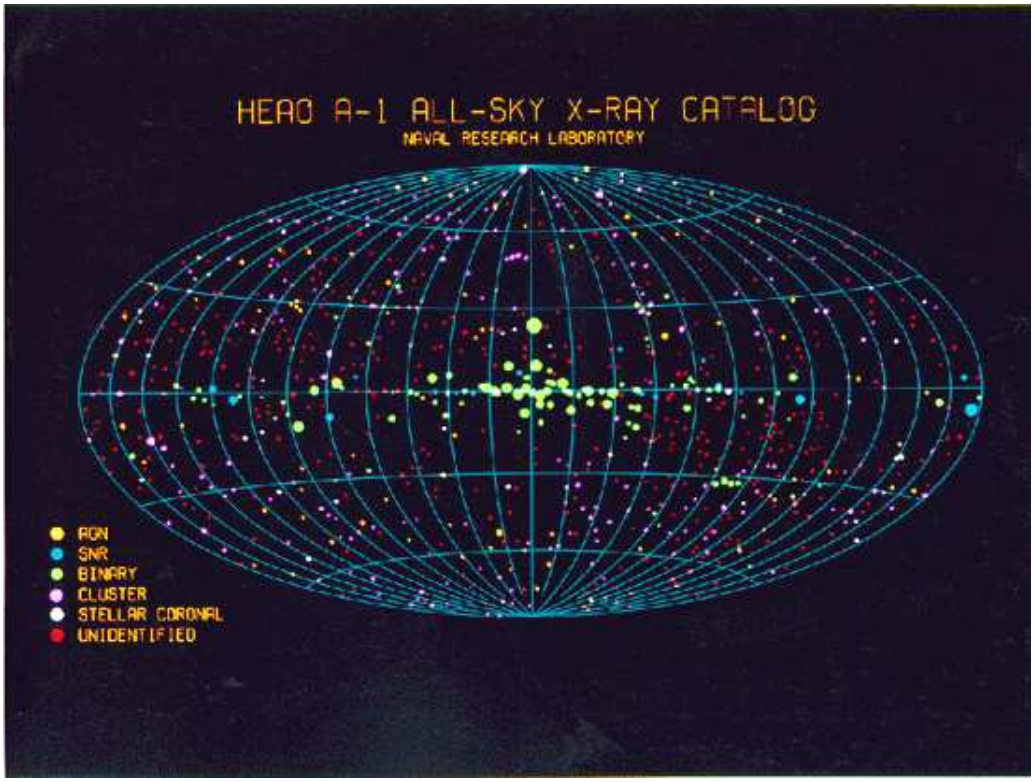

Figura I.8: Una imagen de rayos–X (hasta energías de $\sim 1\,\mathrm{keV}$) de todo el cielo obtenida con el satélite HEAO-1. Es claro que la galaxia no es un notable emisor en esta frecuencia. La imagen es Copyright de la NASA y fue obtenida de `http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/heao1/heao1_images.html`.

Estas partículas son similares a los *rayos cósmicos* que se detectan en lo más alto de la atmósfera terrestre con la ayuda de satélites y globos artificiales. Los rayos–γ se producen mediante la colisión de estas partículas de altas energías y el frío gas del medio interestelar. Fuera del plano galáctico se observan eventos de rayos–γ aislados y de duraciones pequeñas (desde unos cuantos ms hasta unos 10^3 s). Estos eventos están asociados con los fenómenos energéticos más violentos del universo. Se denominan *destellos de rayos–γ*. Justo ahora se está decidiendo quienes son los progenitores de tales eventos, pero todo indica que se debe a explosiones catastróficas probablemente ocurridas por el amalgamiento de dos objetos gravitacionales compactos como un par de estrellas de neutrones, o una estrella de neutrones con un agujero negro, etc.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

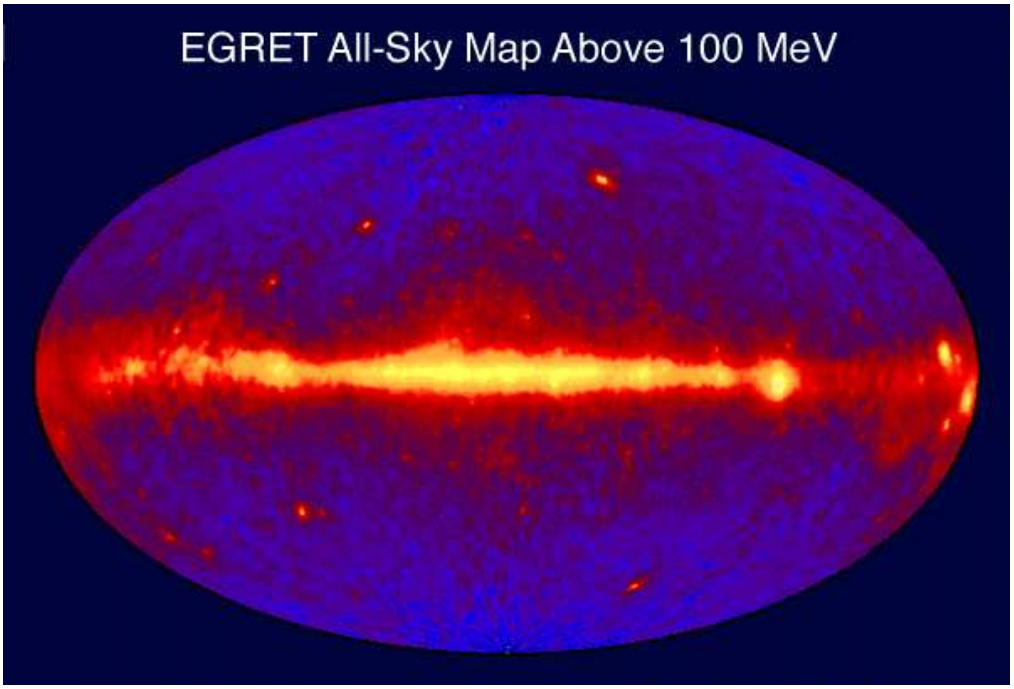

Figura I.9: Imagen de la bóveda celeste en rayos–γ obtenida con el satélite EGRET. La emisión producida por la galaxia se debe a radiación sincrotrónica y no a procesos térmicos. La figura muestra radiación con energías mayores a 100 MeV. Para una mayor información sobre todos los mapas del cielo a altas energías, revisa `http://cossc.gsfc.nasa.gov/images/epo/gallery/skymaps`, donde se encuentra esta imagen y otras mas.

Hacia la parte de energías más bajas que el óptico se encuentra la banda infrarroja como lo muestra la Figura I.10. Al igual que en los rayos–γ se observa que la radiación está dominada por la parte central del diagrama. Esta radiación es producida por el polvo[†] frío del medio interestelar que se encuentra a temperaturas alrededor de $60 - 100\,\mathrm{K}$. A pesar de que el gas no es muy caliente, éste tiene que calentarse o se enfriaría hasta alcanzar una temperatura muy baja radiando toda su energía interna. Lo que sucede es que son las estrellas –sobre todo las de formación reciente y las que están muriendo– las que inyectan energía a este gas para mantener temperaturas del orden de 100 K. Los granos

[†]Los astrónomos llaman polvo a partículas del orden de 1 μm que tienen formas irregulares de carbón y/o silicatos. Estos granos, que se encuentran en el medio interestelar, se encargan generalmente de absorber radiación. Por ejemplo, una de las razones por las cuales se observan manchones negros en la vía láctea y otras galaxias es justamente porque la radiación de sus estrellas ha sido absorbida por el polvo interestelar.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

de polvo en el medio interestelar absorben la radiación óptica y ultravioleta proveniente de las estrellas y la reemiten en el infrarrojo. Por esta razón el estudio del universo en la banda infrarroja es de suma importancia: provee a los astrónomos con herramientas para analizar la formación estelar en los rincones más lejanos del universo.

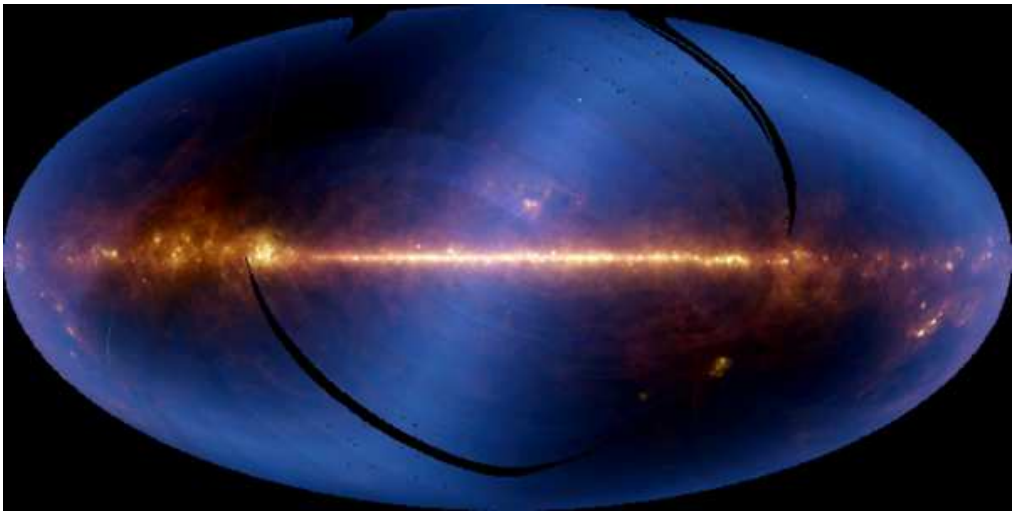

Figura I.10: El mapa de la bóveda celeste en proyección de Aitoff muestra el intervalo entre 60 y 100 μm (infrarrojo). Las observaciones fueron hechas por el satélite IRAS. Es notoria la radiación del polvo interestelar en el plano de la galaxia a estas frecuencias. Mayor información sobre el cielo en infrarrojo se encuentra en `http://coolcosmos.ipac.caltech.edu/image_galleries/missions_gallery.html`. Esta imagen fue obtenida de `http://irsa.ipac.caltech.edu/IRASdocs/iras.html`.

Mientras nos movemos a longitudes de onda más largas comenzamos a observar objetos más fríos. Por ejemplo, la Figura I.11 muestra la bóveda celeste observada en la banda del milimétrico por el satélite COBE (COsmic Background Explorer). Esta radiación es producida por los remanentes de la expansión del universo que se observan hoy en día a una temperatura de $\sim 3\,\mathrm{K}$. La imagen muestra dos claras zonas, la zona superior es más intensa que la zona inferior. Esto es un efecto de visión debido al movimiento de la tierra a través de la radiación de fondo en microondas. De tal manera que si se elimina este efecto Doppler, se obtiene la imagen inferior de la Figura I.11. Una perfecta homogeneidad e isotropía de la radiación de fondo. Resulta que esta isotropía se da a resoluciones de una parte en 10^5. A esta escala, pequeñas fluctuaciones (desviaciones) de la isotropía de la radiación

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

son observables. La Figura I.12 muestra estas irregularidades observadas por el satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). Estas fluctuaciones son cruciales en el estudio de cosmología como veremos más adelante. El espectro de esta radiación es un cuerpo negro, de hecho resulta ser el mejor cuerpo negro que conocemos de la naturaleza.

Al observar el cielo a frecuencias aún más cortas, llegamos a las ondas de radio. La Figura I.13 muestra la bóveda celeste a una radio frecuencia de 408 MHz. De nueva cuenta se observa que el plano galáctico está dominado por radiación en ondas de radio. Sin embargo, esta radiación no se debe a gas frío. Esta radiación es producida por electrones de altas energías que se mueven a velocidades ultra–relativistas y que giran alrededor del campo magnético de la galaxia. A este tipo de radiación se le denomina *radiación sincrotrónica*, pues fue primeramente observada en los aceleradores de partículas terrestres denominados sincrotrones. El hecho de que exista radiación de este tipo en nuestra galaxia significa que existe un campo magnético asociada a la misma. Igualmente, los núcleos activos de galaxias resultan emitir radiación sincrotrónica a diversas radio–frecuencias y esto es lo que se observa a lo lejos del plano galáctico en la Figura I.13. El estudio de la radiación sincrotrónica en los núcleos activos de galaxias es fundamental para el entendimiento de los fenómenos físicos que se llevan a cabo en estos objetos.

§6. Mediciones en astrofísica

Para finalizar esta parte introductoria, veamos brevemente la manera en que los astrónomos miden algunas cantidades fundamentales en la astrofísica.

Las estrellas cercanas a nosotros forman una trayectoria elíptica en la bóveda celeste a lo largo de un año con respecto a estrellas distantes que parecen no moverse en el plano del cielo. Este movimiento elíptico se debe a la rotación de la tierra alrededor del sol. El ángulo que subtiende el semi–eje mayor de la elipse a partir de la estrella en cuestión se denomina *paralaje* θ y está representado en la Figura I.14. Se dice que un objeto se encuentra a una distancia de un *parsec* (pc) si su paralaje es de 1 arcseg. Si en la Figura I.14 $\theta = 1$ arcseg entonces, como la distancia sol–tierra (definida como una *unidad astronómica* cuyo símbolo es AU) es de 8.3 min-luz $\sim 1.5 \times 10^{11}$ m, se obtiene que $1\,\text{pc} \approx 3 \times 10^{16}\,\text{m} \approx 3$ años–luz. El primer paralaje de una estrella fue medido en 1837 por Bessel. En el caso de la estrella más cercana, próxima Centauri, corresponde a

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

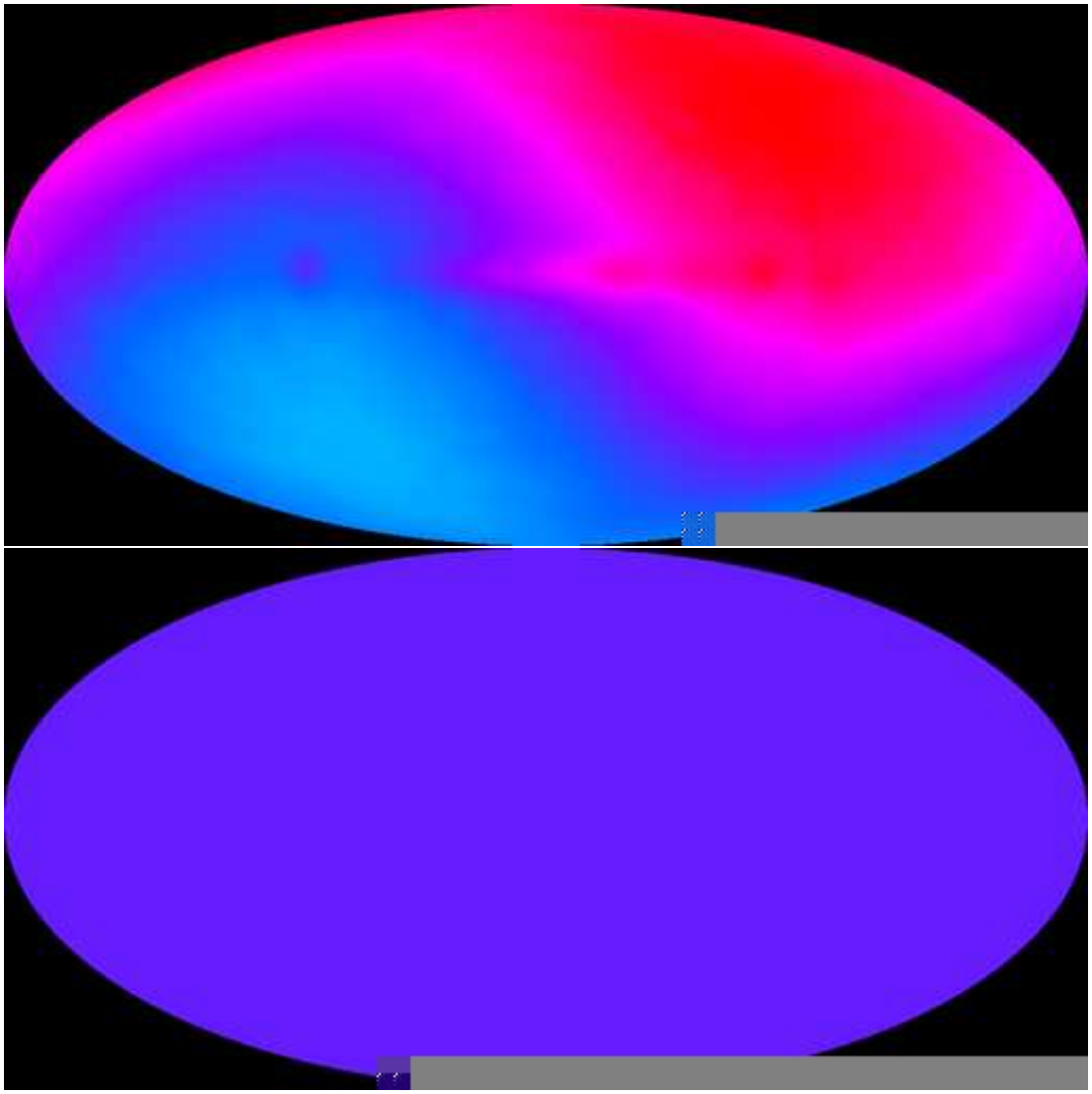

Figura I.11: La figura muestra dos imágenes de la bóveda celeste en una longitud de onda de $\sim 5.7\,\mathrm{mm}$ tomadas por el satélite COBE. El panel superior muestra dos zonas claras que están producidas por el movimiento de la tierra sobre la radiación cósmica de fondo. Al quitar este efecto de traslación se obtiene una radiación homogénea e isotrópica de $\sim 3\,\mathrm{K}$, como lo muestra el panel inferior. La imagen es Copyright de la NASA y fue obtenida en `http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe`.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

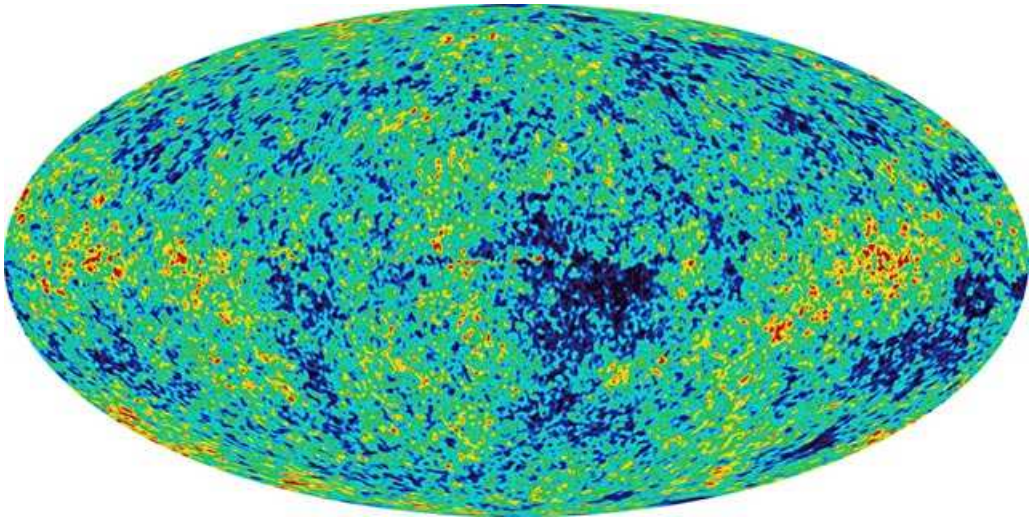

Figura I.12: Al refinar la imagen de la Figura I.11 y observar en ángulos mayores a 10° se detectan pequeñas irregularidades en la homogeneidad de la radiación de fondo en microondas. Estas fluctuaciones son las causantes de la formación de la estructura del universo a gran escala hoy en día. La imagen fue tomada con el satélite WMAP, es Copyright de la NASA y se obtuvo en `http://map.gsfc.nasa.gov`.

1.2 arcseg. Hoy en día el satélite Hipparcos ha medido paralajes de la gran mayoría de estrellas observables hasta una distancia de ~ 100 pc.

Las velocidades radiales de una estrella o cualquier otro objeto radiante pueden ser medidas utilizando el corrimiento al rojo que produce el efecto Doppler en el espectro electromagnético (principalmente óptico). Esto consiste en observar las líneas de emisión y absorción que produce los elementos químicos del gas que se observa. De aquí se identifican las líneas observadas y si existe una desviación con respecto a las observaciones en los laboratorios terrestres, se atribuye el corrimiento (al rojo o al azul) al movimiento radial del objeto con respecto a nosotros. La velocidad transversal de un objeto $\dot{\theta}$ después de haber sido corregida por un posible paralaje, se denomina *movimiento propio*. Si por alguna razón este movimiento propio se debe digamos a una expansión uniforme entonces es claro que la velocidad de expansión estará dada por $v_r = R\dot{\theta}$, en donde R es la distancia de la tierra al objeto en cuestión. Este método se utiliza para cúmulos de galaxias y nebulosas planetarias donde se supone que el movimiento es radial a partir de un objeto central.

En estudios de campos electromagnéticos y por ende en astronomía, se utiliza el con-

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

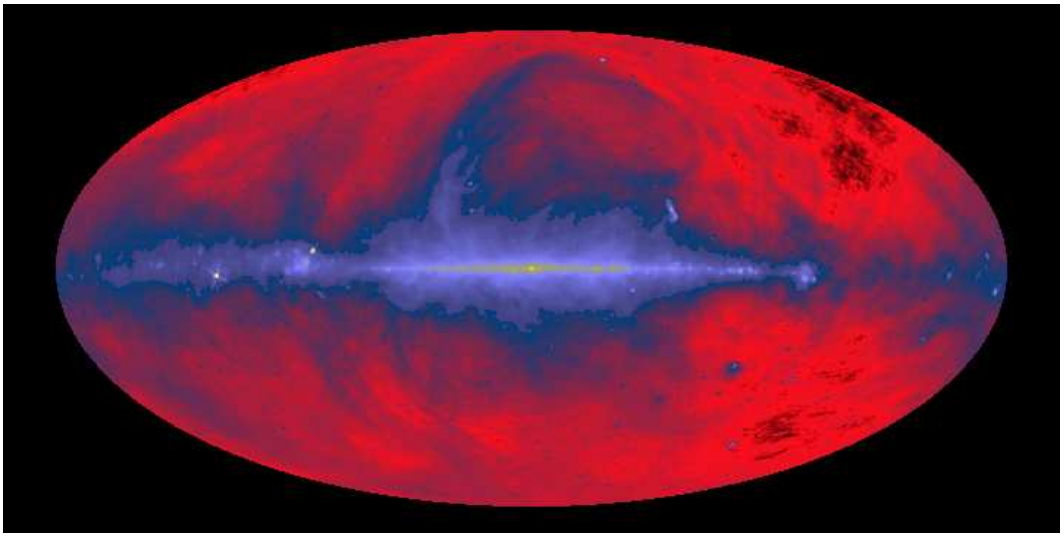

Figura I.13: Mapa del cielo en ondas de radio con frecuencia de 408 MHz (73 cm). La radiación observada es radiación sincrotrónica producida por electrones girando alrededor de campos magnéticos a velocidades ultrarelativistas. El crédito de la imagen es para el Max Planck Institute for Radio Astronomy. La imagen fue generada por Glyn Haslam y fue obtenida en `http://antwrp.gsfc.nasa.gov/htmltest/jbonnell/www/multiw_sky.html`.

cepto de *luminosidad* (o *potencia*) L que es la cantidad de energía radiada por unidad de tiempo que emite un determinado objeto. La luminosidad de un objeto se mide en W o en erg/s. El *flujo de energía electromagnética* o simplemente *flujo* F es la cantidad de energía radiada por unidad de tiempo por unidad de área. Si el objeto en cuestión radia de manera isotrópica es claro que el flujo de radiación electromagnética F observado por un objeto a una distancia R y que emite con una luminosidad L está dado por

$$F = \frac{L}{4\pi R^2}. \tag{6.1}$$

El flujo (o cantidad de radiación observada) es una cantidad que disminuye con la distancia, la luminosidad es una cantidad intrínseca al objeto y representa la potencia con la cual el objeto está emitiendo energía electromagnética.

Algunas estrellas de luminosidad variable como las estrellas cefeidas tienen una luminosidad bastante bien definida (y por lo tanto son consideradas como velas estándares en

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

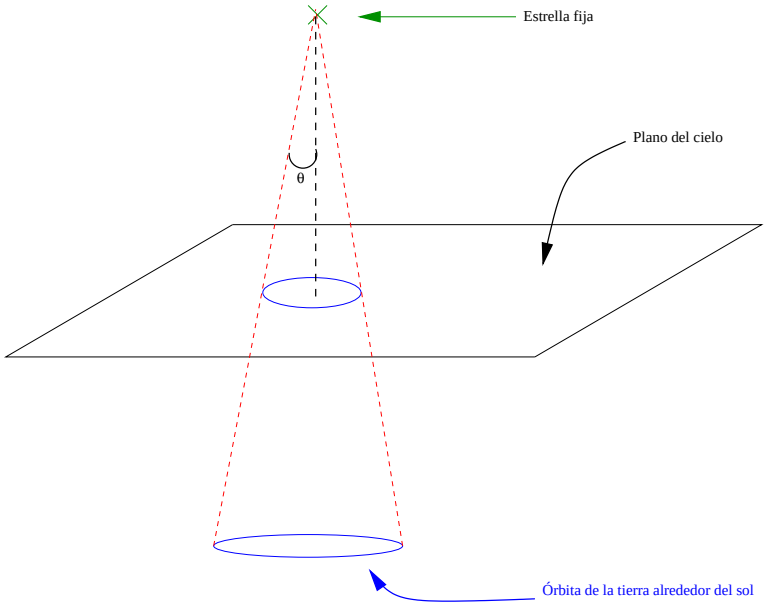

Figura I.14: La figura muestra el paralaje θ que posee una estrella debido al movimiento de la tierra alrededor del sol. Desde la tierra, es la estrella quien parece estar moviéndose en una elipse sobre el plano del cielo.

el universo). De tal manera que, como para las cefeidas L es una cantidad conocida, al observar el flujo F en la tierra es posible determinar la distancia a la que estos objetos se encuentran. Estos métodos se utilizaron para encontrar la distancia a ciertas galaxias en el pasado. Hoy en día se utilizan otros métodos más avanzados. Resulta que una clase de explosiones supernova tienen una curva de luz (diagrama L vs tiempo) bastante bien determinada. Por lo tanto es posible que cuando estas curvas de luz son identificadas en monitoreos aleatorios realizados sobre galaxias lejanas, es certero afirmar que una explosión supernova se llevó acabo en la galaxia en observación. A partir de esto, se puede inferir de una manera muy precisa la distancia a ciertas galaxias y así entonar los parámetros necesarios para explicar la dinámica del universo. Resulta que, como veremos más adelante, estas observaciones indican que el universo se está expandiendo (acelerando) más rápido de lo que las teorías estándares pueden explicar. Esta expansión extra se le atribuye a un campo escalar denominado la *quintaesencia* (por aquello de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza según los griegos). Esta fuerza produce una repulsión gravitacional, es decir,

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

funciona como antigravedad[†].

En el siglo II DC, Hiparco clasificó a las estrellas en 6 grupos de *magnitud aparente* (brillo observado) m. A las más brillantes las puso en el número 1 de su clasificación y a las menos brillantes en el número 6. En 1856, Pogson definió un sistema de brillos para objetos astronómicos y notó que las estrellas en la clasificación 6 de Hiparco eran más o menos $1/100$ veces más brillantes que una estrella en la clase 1. De aquí se deduce que el ojo humano es un detector de brillo logarítmico. Pogson encontró de manera experimental que

$$m = -2.5 \log F + \text{const}, \tag{6.2}$$

donde F es el flujo observado de la estrella en cuestión cuya magnitud es m. La constante es simplemente una constante de calibración. A manera de ejemplo, consideremos dos estrellas con magnitudes m_1 y m_2 respectivamente. Si además $m_2 = 6$ y $m_1 = 1$ entonces se obtiene que $F_1/F_2 = 1/100$, donde F_1 y F_2 son los flujos de las estrellas con magnitudes m_1 y m_2 respectivamente. Dicho de otro modo, el flujo de radiación de la primer estrella es 100 veces mayor al flujo de la segunda.

La *magnitud absoluta* M se define como la magnitud aparente que tendría un objeto situado a una distancia de 10 pc. De aquí que

$$m - M = 5 \log \left(\frac{D}{10\,\text{pc}} \right). \tag{6.3}$$

En el visible, el sol tiene $m_v = -27$ y $M_v = 4.83$. La estrella del amanecer, Sirio tiene $m_v = -1.4$. Lo menos que nuestros ojos alcanzan a ver es hasta $m_v = 6$. Una vela en la superficie de la luna tendría $m_v \approx 25$. Lo más que hemos sido capaces de detectar con nuestros instrumentos astronómicos es $m_v \sim 28$–30.

Existen diversos métodos para medir las masas de objetos gravitacionales, pero el más sencillo de todos es el que se utiliza para medir la masa de los planetas en el sistema solar o del sol. Consideremos dos partículas de masas m_1 y m_2 que interaccionan gravitacionalmente. El Lagrangiano de este sistema está dado por

[†]La introducción de la constante cosmológica por Albert Einstein para obtener un universo estático es básicamente lo mismo, una fuerza de antigravedad. Ya describiremos más adelante todas las formas físicas que puede tener esta constante cosmológica y como se utiliza en cosmología.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \tag{6.4}$$

en donde $\mathbf{r}_{1,2}$ representan los vectores posición de las partículas 1 y 2 y el punto ($\dot{[\,]} := d/dt$) representa la derivada con respecto al tiempo t. Si nos montamos en el sistema de referencia del centro de masa del sistema (i.e. $m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = 0$) y definimos la posición relativa entre las partículas $\mathbf{r} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ entonces el Lagrangiano de la ecuación (6.4) toma la forma

$$L = \frac{1}{2}\mu v^2 + G\frac{\mu\,(m_1 + m_2)}{r}. \tag{6.5}$$

Aquí hemos escrito $\dot{\mathbf{r}} := \boldsymbol{v}$ y a la masa reducida $\mu := m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. La ecuación (6.5) muestra como el problema de dos cuerpos representado en la la igualdad (6.4) puede ser reducido al problema de una partícula con velocidad $\boldsymbol{v}$ y masa μ moviéndose en un campo gravitacional con potencial gravitacional $\phi = -G(m_1 + m_2)/r$. El problema de tres o más cuerpos que interaccionan gravitacionalmente no ha tenido una solución analítica como el problema de dos cuerpos. La forma en la que se resuelven los problemas de varios cuerpos es mediante aproximaciones numéricas.

Utilizando las ecuaciones de Euler–Lagrange ($d\,(\partial L/\partial \boldsymbol{v})\,/dt = \partial L/\partial \mathbf{r}$) se obtiene la ecuación de movimiento

$$\mu\boldsymbol{a} = -G\frac{\mu(m_1 + m_2)}{r^2}\boldsymbol{e}_r, \tag{6.6}$$

donde $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}$ representa la aceleración de la partícula y $\boldsymbol{e}_r$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$. Si suponemos ahora que la partícula de masa m_1 es mucho más masiva que la de masa m_2 (como el sol y la tierra), entonces la partícula 1 estará fija y la partícula 2 girará en torno a la primera. Si además consideramos que la órbita de la partícula 2 alrededor de 1 es circular entonces la aceleración es puramente centrífuga, es decir, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r v^2/r$. Con esto se obtiene que

$$m_1 = \frac{v^2 r}{G}. \tag{6.7}$$

Si se conocen v y r entonces puede determinarse la masa m_1 del objeto central. Este método también se utiliza para sistemas con simetría esférica como lo son los cúmulos

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

globulares, las galaxias elípticas y los cúmulos de galaxias.

Utilizando estimaciones de masa y luminosidad con por ejemplo, los métodos descritos arriba, se define la razón o el cociente *masa–luminosidad* M/L. Resulta que este cociente crece (como ha de esperarse) cuando las distancias sobre las cuales se mide la masa y la luminosidad, se aumentan. Sorprendentemente, este cociente crece tanto que excede la masa asociada a la luminosidad estelar observada. Este exceso de materia se denomina *materia oscura* (materia oscura es cualquier masa que no está asociada a masa estelar, por ejemplo, libros, planetas, enanas cafés, etc.). A la fecha la materia oscura no–bariónica (i.e. no compuesta de materia normal) ha eludido todo tipo de detección. Sin embargo, de manera indirecta, todo parece indicar su existencia sobre todo en galaxias espirales, cúmulos de galaxias y muy probablemente está distribuida de manera regular a lo largo de todo el universo.

La masa que aparece en la ecuación (6.6) puede ser considerada también una función de la distancia al centro de la configuración r si se considera que la distribución de masa solamente depende de la distancia al centro. Esto es fácil de mostrar pues si consideramos que la densidad de masa ρ es únicamente una función de r entonces el potencial gravitacional Newtoniano producido por la masa contenida en un radio r está dado por

$$\phi = -G\int \frac{dV'\rho(r')}{|r-r'|} = -G\int \frac{\rho(r'_{int})dV'}{|r-r'_{int}|} - G\int \frac{\rho(r'_{ext})dV'}{|r-r'_{ext}|}. \tag{6.8}$$

En el último paso de la ecuación (6.8) se ha dividido la integral de volumen V en dos integrales. La primera es una integral que se lleva desde el centro de simetría hasta la posición r (integral dentro de r). La segunda es una integral que se lleva desde la posición r hasta el final de la configuración (que puede ser infinito). Debido a la simetría del problema es suficiente con hacer el cálculo de estas integrales en una dirección particular, digamos en la dirección $\boldsymbol{e}_z$ del eje z. De esta manera, podemos escribir $\mathbf{r} = r\boldsymbol{e}_z$, con lo cual se obtiene $|r\boldsymbol{e}_z - r'\boldsymbol{e}_{r'}| = \sqrt{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')}$, siendo θ' el ángulo (ángulo polar) que se forma entre los vectores unitarios $\boldsymbol{e}_z$ y $\boldsymbol{e}_{r'}$. Con esto se obtiene que

$$\phi = -\frac{2\pi G}{r}\int_0^r dr'_e\rho(r'_e)r'_e\left\{|r'_e + r| - |r'_e - r|\right\} - \frac{2\pi G}{r}\int_r^{R(=\infty?)} dr'_i\rho(r'_i)r'_i\left\{|r'_i + r| - |r'_i - r|\right\}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

y como $r_e > r$ y $r_i < r$ entonces

$$\phi(r) = -4\pi G \left\{ \frac{1}{r}\int_0^r dr_i' \rho(r_i') r_i'^2 + \int_r^{R(=\infty?)} dr_e' \rho(r_e') r_e'. \right\} \tag{6.9}$$

Finalmente, utilizando el hecho de que la aceleración gravitacional $\mathbf{g} = -\mathbf{grad}\,\phi$ se obtiene que

$$\mathbf{g} = -G\frac{M(r)}{r^2}\boldsymbol{e}_r, \tag{6.10}$$

en donde la masa $M(r)$ encapsulada dentro del radio r está dada por

$$M(r) := 4\pi \int_0^r \rho'(r') r^2 dr' = \int \rho'(r')\, d\, V'. \tag{6.11}$$

Esta última integral está tomada desde el origen hasta la posición r. La ecuación (6.10) muestra que la fuerza gravitacional que se ejerce sobre una partícula de prueba hasta el radio r y que es producida por una distribución de masa simétricamente esférica, resulta ser generada únicamente por la masa interior al punto r. De aquí se sigue por ejemplo, que la fuerza gravitacional que la atmósfera terrestre hace en nosotros, al estar parados en la superficie de la tierra, es nula. La ecuación (6.10) dice además que la fuerza gravitacional es como la producida por una masa puntual localizada en el origen de coordenadas y que posee una masa $M(r)$. Éste es un resultado importantísimo y se debe a Isaac Newton, quién tardó alrededor de diez años para su demostración.

La distribución más simple de materia en el universo es aquella que tiende a atraerse, en otras palabras, es inestable y produce un *colapso gravitacional*. La visible expansión del universo contrarrestar este efecto, sin embargo, regiones localizadas en el universo tienden a formar estructuras colapsadas gravitacionalmente como son las galaxias y las estrellas. Estos objetos estables mantienen su estabilidad a un colapso gravitacional mediante la producción de presión térmica (presión cinética de un gas), presión de radiación (presión producida por fotones), presión degenerativa (presión cinética producida como consecuencia del principio de exclusión de Pauli), presiones electromagnéticas (presión producida por

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

campos electromagnéticos) y por rotación (momento angular produce una fuerza centrífuga).

Cuando se tienen electrones con velocidades relativistas, se generan fuentes que radian en diversas bandas del espectro. Estas fuentes involucran a los objetos más potentes (i.e. con altas luminosidades), más compactos (i.e. con altos cocientes luminosidad entre tamaño (L/R)) y las más variables (pequeñas R para grandes L). En muchas de las ocasiones la fuerte fuerza de gravitación es la responsable de estos fenómenos (pulsares, cuasares, agujeros negros, destellos de rayos-γ, etc.). Todos éstos y más fenómenos serán analizados en detalle a lo largo del curso.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Capítulo II

Relatividad Especial

En mecánica Newtoniana, si se tienen n cuerpos interaccionando (por ejemplo de manera gravitacional), el potencial de interacción (potencial gravitacional) solamente depende de las posiciones y no del tiempo. Por lo tanto cuando una de las partículas se mueve, el potencial cambia de manera instantánea. Diversos experimentos en la física muestran que la transmisión de información no es inmediata. El tiempo que tarda esta información en transmitirse es la velocidad de transmisión de información entre la distancia que separa a dos partículas interactuantes. La velocidad máxima a la que se transmite la información resulta ser la velocidad de la luz en el vacío. En este capítulo se asume que los lectores saben que es la teoría especial de la relatividad de Einstein. La intención es repasar esta teoría para ver sus aplicaciones en astrofísica y utilizarla como base más adelante, al construir la teoría de gravitación relativista de Einstein.

§7. Vectores y tensores en el espacio euclidiano de 3D

Un vector es un conjunto ordenado de tres números los cuales se denominan por $\mathbf{a} = a_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$. Aquí estamos utilizando la convención introducida por Einstein en la cuál dos subíndices (o superíndices) que aparecen juntos en una operación matemática implica sumatoria. Los índices Latinos $h,\ i,\ j$, etc. toman valores $0, 1,\ 2,\ 3$ y los índices Griegos $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, etc. toman valores $1,\ 2,\ 3$. Los vectores $\boldsymbol{e}_\alpha$ son vectores unitarios en las direcciones $x,\ y,\ z$, o si se prefiere en las direcciones $1,\ 2,\ 3$. Así pues el vector $\mathbf{a}$ está dado por la relación $\mathbf{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$.

El *producto escalar* de dos vectores es evidentemente

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= a_\alpha b_\beta \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta \\ &= a_\alpha b_\beta \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde la *delta de Kronecker* $\delta_{\alpha\beta}$, o el *tensor unitario de rango 2* es un objeto de 9 cantidades definidas por $\delta_{\alpha\beta} := 1$ si $\alpha = \beta$ y $\delta_{\alpha\beta} := 0$ si $\alpha \neq \beta$.

El *producto vectorial* de dos vectores es

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} &= a_\alpha b_\beta \boldsymbol{e}_\alpha \wedge \boldsymbol{e}_\beta \\ &= a_\alpha b_\beta \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_\gamma, \end{aligned} \tag{7.2}$$

en donde el *tensor unitario completamente antisimétrico* de rango tres $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$, o *tensor de Levi–Civita* es un objeto de 27 cantidades. Este tensor es tal que sus componentes cambian signo ante cualquier intercambio de cualquier par de índices. Además, las componentes no nulas del mismo son ± 1. Gracias a su antisimetría las componentes en las cuales aparezcan dos índices repetidos son nulas. En otras palabras, las componentes no nulas son aquellas que poseen todos sus índices diferentes. Es costumbre definir

$$\epsilon_{123} = +1. \tag{7.3}$$

De esta manera los valores de $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ son $+1$ o -1 si los números $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ pueden ser llevados al arreglo $1,\ 2,\ 3$ por un número par o impar de permutaciones respectivamente. Evidentemente el número de todas las posibles permutaciones es $3!$ En otras palabras

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 3! \tag{7.4}$$

En realidad el tensor $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ no es un tensor. Es un *pseudotensor* pues sus componentes se comportan como las de un tensor al hacer una rotación del sistema coordenado. Sin embargo al hacer un cambio de signo en una o tres de las coordenadas (una reflexión), algunas de las componentes de este tensor deberían cambiar. No obstante, estas componentes también quedan iguales ya que el tensor se definió de la misma manera en todos

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

los sistemas coordenados. Los pseudotensores de cualquier rango (incluso los de rango 0 que son *pseudoescalares*) se comportan como tensores bajo todas las transformaciones de coordenadas, excepto aquellas que no pueden ser reducidas a rotaciones. Es decir, bajo reflexiones.

Puede mostrarse (te debe de quedar claro esto al ver la parte de tensores y vectores en la sección relativista) que $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\mu\nu}$ es un tensor verdadero (es decir, no es pseudotensor) de rango 6. Si se contrae uno o más índices, entonces se obtienen tensores de rango 4, 2 y 0. Obviamente todos estos tensores tienen la misma forma en cualquier sistema de coordenadas. Debido a esto, y ya que el valor de estos tensores es ± 1 o 0 para cada una de sus componentes, estos mismos deben de poder expresarse como productos de $\delta_{\alpha\beta}$. De hecho,

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\beta\gamma} = 2!\,\delta_{\alpha\lambda}, \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\mu\gamma} = 1!\det\begin{bmatrix}\delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu}\\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu}\end{bmatrix}, \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\mu\nu} = 0!\det\begin{bmatrix}\delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu}\\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu}\\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu}\end{bmatrix}. \tag{7.5}$$

El *determinante* de un tensor $a_{\alpha\beta}$ de rango 2 es el determinante de la matriz formada por sus componentes. Para escribir este determinante en términos del tensor de Levi–Civita hagamos la siguiente analogía. El producto vectorial de dos vectores puede escribirse como un determinante y como la ecuación (7.2). Es claro entonces que el determinante del tensor $a_{\alpha\beta}$ está dado por

$$\det(a_{\alpha\beta}) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}a_{\alpha1}a_{\beta2}a_{\gamma3}. \tag{7.6}$$

Con ayuda de está ecuación, se obtiene la siguiente relación

$$\epsilon_{\alpha\beta\eta}a_{\alpha\lambda}a_{\beta\mu}a_{\eta\nu} = \det\begin{bmatrix}a_{1\lambda} & a_{1\mu} & a_{1\nu}\\ a_{2\lambda} & a_{2\mu} & a_{2\nu}\\ a_{3\lambda} & a_{3\mu} & a_{3\nu}\end{bmatrix} = \epsilon_{\lambda\mu\nu}\det\left(a_{\alpha\beta}\right). \tag{7.7}$$

Si ahora multiplicamos la ecuación (7.7) por $\epsilon_{\lambda\mu\nu}$ y utilizamos la ecuación (7.4) entonces

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\eta}a_{\alpha\lambda}a_{\beta\mu}a_{\eta\nu} = 3!\det\left(a_{\alpha\beta}\right). \tag{7.8}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Esta relación muestra otra forma (en vez de la más informal y poco útil para la notación de Einstein dada por el cálculo matricial (7.6)) de calcular el determinante de un tensor de rango 2.

Es costumbre llamar vector a la componente escalar a_α y tensor a la componente escalar $\Pi_{\alpha\beta\gamma\omega}$ ya que, teniendo en mente que los índices griegos varían conforme a lo dicho anteriormente, estos mismos dan razón de ser al vector o al tensor al variar sus índices. Así pues, uno se refiere al *divergente* del vector $\mathbf{a}$ como $\partial a_\alpha/\partial x_\alpha$, al *gradiente* de la función χ como $\partial\chi/\partial x_\alpha$, al rotacional de el vector $\mathbf{a}$ como $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial a_\alpha/\partial x_\beta$, etc.

El *teorema de Gauss* se puede aplicar a cualquier tensor de rango 1 (un vector), o a cualquier otro tensor de rango mayor

$$\oint F_{\alpha\beta} da_\alpha = \int \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_\alpha} d\,V, \tag{7.9}$$

en donde $F_{\alpha\beta}$ es un tensor de rango 2, da_α es la α–componente del elemento de área cerrada que envuelve al volumen V.

De la misma manera, el *teorema de Stokes*[†] puede escribirse como

$$\oint F_{\alpha\beta} dl_\alpha = \int \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \epsilon_{\alpha\gamma\eta} da_\eta \tag{7.10}$$

donde dl_α es un elemento de línea y el área a la cual el elemento da_α pertenece es cualquiera que tenga como frontera a la curva por la cual la integral de la derecha es tomada.

Tarea 1

Utilizando notación de Einstein, demuestra las siguientes identidades vectoriales.

(I) $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) = 0$

(II) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b})$

[†]El teorema de Stokes es uno de los teoremas centrales de la geometría diferencial. Stokes era Profesor Lucasiano de Matemáticas en el departamento de matemáticas de la Universidad de Cambridge e investigador en el Laboratorio de física (mejor conocido como el Laboratorio Cavendish) de la misma Universidad. El teorema de Stokes apareció por primera vez impreso en uno de los exámenes de matemáticas tomado por Maxwell. Evidentemente, esto fue de gran importancia para el desarrollo de la teoría del electromagnetismo. La demostración explícita más antigua que se conoce parece ser aquella que en una carta Thomson mandó a Stokes en Julio 2 de 1850.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

(III) $\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{a} + \mathbf{a}\wedge\nabla\wedge\mathbf{b} + \mathbf{b}\wedge\nabla\wedge\mathbf{a}$

(IV) $\nabla\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b}\nabla\cdot\mathbf{a}$

De esto se sigue que

$\nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{a}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}$.

Es curioso notar la similitud de esta relación con la famosa relación vectorial

$\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

De hoy en adelante, no hay pretexto para no utilizar la notación de Einstein en todas tus matemáticas. ¡Aprovéchala!

§8. Principio de relatividad

La descripción de los fenómenos en la naturaleza se lleva a cabo mediante el uso de los llamados *Sistemas de Referencia*. Un sistema de referencia es un sistema coordenado mediante el cual se miden posiciones en el espacio. Este sistema posee relojes *fijos* en cada punto del espacio, los cuales indican el tiempo. De todos los sistemas de referencia, uno de los utilizados con más frecuencia es el denominado *Sistema de Refencia Inercial*. Un sistema de referencia inercial es aquel sobre el cual un cuerpo que se mueve libremente (es decir, que no hay fuerzas externas que actúen sobre el) se desplaza con velocidad constante. Vulgarmente se dice que un sistema de este tipo es aquel sobre el cual todos los acelerómetros en cualquier dirección marcan cero.

Si dos sistemas de referencia se mueven con velocidad constante uno con respecto a otro y el primero es un sistema de referencia inercial, es obvio que el segundo es también un sistema de referencia inercial. Por lo tanto, existen tantos sistemas de referencia inerciales como se desee y además, todos se mueven con velocidad uniforme entre sí.

Distintos experimentos y observaciones en la naturaleza muestran que el llamado *principio*[†] *de relatividad* es valido. Este principio dice que todas las leyes de la naturaleza son idénticas en todos los sistemas de refencia inerciales. Evidentemente esto implica que

[†]Recuerda que en física nuestros axiomas se llaman principios y son los fundamentos básicos de una teoría. De estos mismos pueden deducirse matemáticamente las leyes que se observan en distintos experimentos. Ejemplos de principios son: el principio de relatividad en mecánica, el principio de Pascal en hidrodinámica y el principio de incertidumbre en mecánica cuántica.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

todas las ecuaciones de la naturaleza tienen la misma forma en todos los sistemas de refencia inerciales. Dicho de otra manera, las ecuaciones de la naturaleza son *invariantes* con respecto a transformaciones de coordenadas y tiempo de un sistema de refencia inercial a otro.

Las interacciones en mecánica clásica se llevan a cabo instantáneamente mediante el uso de un potencial que no depende del tiempo. El ejemplo más clásico de este tipo es la ley de Newton de gravitación universal. Cuando una masa se mueve, instantáneamente la información es transmitida a todo el espacio, modificando el potencial gravitacional.

Diversos experimentos en la naturaleza muestran que la transmisión de información no se lleva a cabo de manera instantánea. De hecho, ésta se transmite en un intervalo de tiempo finito. La distancia que recorre la transmisión de información dividida por el tiempo que toma esta información en transmitirse se denomina la velocidad de transmisión de la información información. Evidentemente, esta velocidad debe ser muy rápida de lo contrario lo notaríamos en nuestras actividades cotidianas. Aún más, esta velocidad debe ser la *máxima* velocidad de propagación de información. Es obvio que no puede existir movimiento alguno más rápido que esta velocidad máxima de propagación de información. Si así fuera, imagina a dos autos moviéndose en direcciones opuestas. La señal de que el primer auto sale en dirección hacia el segundo auto se transmitiría más lento que lo que tarda en ocurrir la colisión entre ambos automóviles. Todos nuestros experimentos muestran que esto no es posible.

En física se denomina *señal* al acto de mandar información entre dos partículas. De esta manera es apropiado hablar de la velocidad de propagación de señales refiriéndonos a la velocidad de propagación de información.

Del principio de relatividad se sigue que la velocidad de propagación de señales es la misma para todos los sistemas de refencia inerciales. De ahora en adelante denominaremos esta velocidad por c. Experimentalmente, esta velocidad c tiene un valor

$$c \sim 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \tag{8.1}$$

que corresponde a la velocidad de propagación de la luz en el vacío. El hecho de que la magnitud de esta velocidad sea grande con respecto a las velocidades a las que estamos acostumbrados, implica que la mecánica Newtoniana es una buena descripción del mundo

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

que nos rodea.

Se denomina *principio de relatividad de Einstein* al principio de relatividad combinado con el hecho de que la velocidad de propagación de señales –la velocidad de la luz– es finita[†].

Evidentemente, cuando las velocidades de los cuerpos en cuestión son mucho menores que la velocidad de la luz, puede despreciarse el hecho de que c es finita y ponerla como infinito. Formalmente esto significa que para pasar de mecánica relativista a mecánica Newtoniana basta con hacer tender la velocidad de la luz c a infinito.

§9. Relatividad del tiempo

En la mecánica no–relativista la distancia entre dos *eventos*, (un evento es un conjunto de coordenadas y tiempo utilizado para describir donde y a que hora ocurre cierto fenómeno físico) es relativa. Por ejemplo, imagina dos eventos que ocurren de manera no simultanea en un lugar del espacio o a una distancia fija de cada uno. Estos mismos sólo tienen sentido si se especifican con respecto a un sistema de referencia.

A manera de ejemplificar esto, piensa en un guardia que se encuentra en la puerta de el palacio nacional en el zócalo de la Ciudad de México. A las 10:00am él observa un choque entre dos microbúses y como un taxista justamente se salva de la colisión. Más tarde, a las 10:15am el mismo guardia observa como una marcha se acerca hacia las puertas del palacio nacional proveniente de la calle Francisco I. Madero. En este instante, el taxista que libro el choque se encuentra ya en el Ángel de la Independencia en Reforma. Para el guardia presidencial, ambos eventos ocurrieron en un punto fijo desde su origen de coordenadas. Sin embargo, para el taxista con respecto a su origen, la distancia al primer evento fue nula, pero la segunda tiene unos cuantos kilómetros de distancia. Esta relatividad de la distancia en mecánica no–relativista tiene que ser heredada en mecánica relativista.

Cuando hablamos de intervalos de tiempo en mecánica no–relativista, los asumimos siempre como *absolutos*. En otras palabras, existe un sólo tiempo para todos los sistemas de referencia inerciales. Si esto fuera cierto en mecánica relativista, entonces utilizando la ley de adición de velocidades que está basada utilizando el hecho de que el tiempo

[†]El principio de relatividad de Galileo es el principio de relatividad más la suposición que la velocidad de la luz es infinita.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

es absoluto, nos diría que la velocidad de la luz sería diferente en distintos sistemas de referencia inercial. Evidentemente esto está en contradicción con el principio de relatividad de Einstein. La prueba experimental de este fenómeno se debe a Michelson en 1881.

De esta manera hemos probado que el principio de relatividad de Einstein implica que el tiempo es relativo. Dicho de otra manera, el tiempo elapsa de manera distinta en distintos sistemas de referencia.

A manera de visualizar éste tan drástico cambio, imagina un observador fijo en el andén del metro. Dentro de un vagón del metro casualmente se encuentra un vendedor ambulante justo a la mitad del mismo. El vendedor ofrece lamparas para leer. En un momento dado, este individuo enciende una de sus lámparas para mostrar al público usuario la utilidad de la misma. Los rayos de luz llegan a los extremos del vagón de manera simultanea con respecto a la gente que está dentro del vagón. Sin embargo, para el observador en el andén del metro esta simultaneidad de eventos no es cierta. Esto se debe a que la parte trasera del metro se mueve hacia el haz de luz que sale del objeto y la parte delantera se aleja de este misma con respecto a la posición del vendedor. Así pues, el observador en el andén ve llegar primero el haz de luz a la parte trasera del vagón y luego a la parte delantera.

El principio de relatividad de Einstein cambia de manera drástica nuestra concepción del mundo. Nuestro conocimiento erróneo se debe a que vivimos en un mundo donde las velocidades de movimiento de los distintos objetos que nos rodean es mucho menor que la máxima velocidad de la transmisión de señales.

Sin embargo, hoy en día la astrofísica nos provee de laboratorios naturales mediante los cuales estos fenómenos pueden ser visibles. A manera de ejemplo, analicemos los llamados movimientos *superlumínicos* en astrofísica. Estos son movimientos observados en el cielo que parecen ser más veloces que la velocidad de la luz en el vacío.[†] Imagina una galaxia elíptica cuyo núcleo es capaz de lanzar dos pares de chorros o *jets* de gas en direcciones antiparalelas. La longitud de estos jets varía dependiendo del objeto que se observe, pero llegan a medir hasta unos cuantos millones de parsecs. Esto es inmenso comparado con el tamaño típico de una galaxia elíptica que es de unos cuantos kiloparsecs. El material (gas)

[†]Los movimientos superlumínicos en astrofísica fueron matemáticamente establecidos por Martin Rees en el Instituto de Astronomía de la Universidad de Cambridge en los 1960's. Distintas observaciones más tarde mostraron su veracidad en cuasares. Estos movimientos fueron observados también en objetos de tamaño galáctico en nuestra galaxia (micro–cuasares) por Luis Felipe Rodriguez en el Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México y sus colaboradores en la década de los 1990's.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

en estos jets se mueve a velocidades cercanas a la velocidad de la luz ($\sim 0.99c$). A este tipo de objetos se les conoce como radiogalaxias o cuasáres y resultan ser los objetos más energéticos del universo. En ocasiones a través del jet se puede ver manchas (comúnmente identificadas con ondas de choque energéticas) que se mueven a lo largo del mismo. En la tierra lo que se observa es el núcleo fijo de la galaxia y una onda de choque que se aleja del núcleo a través del jet. En este modelo, llamado el *modelo estándar de dos fuentes para movimientos superlumínicas* se observan dos fuentes de radiación: la fuente central (el *núcleo activo de la galaxia*) y una mancha (la onda de choque). El jet hace un ángulo pequeño θ con respecto a la *línea de visión* del observador (Figura II.1).

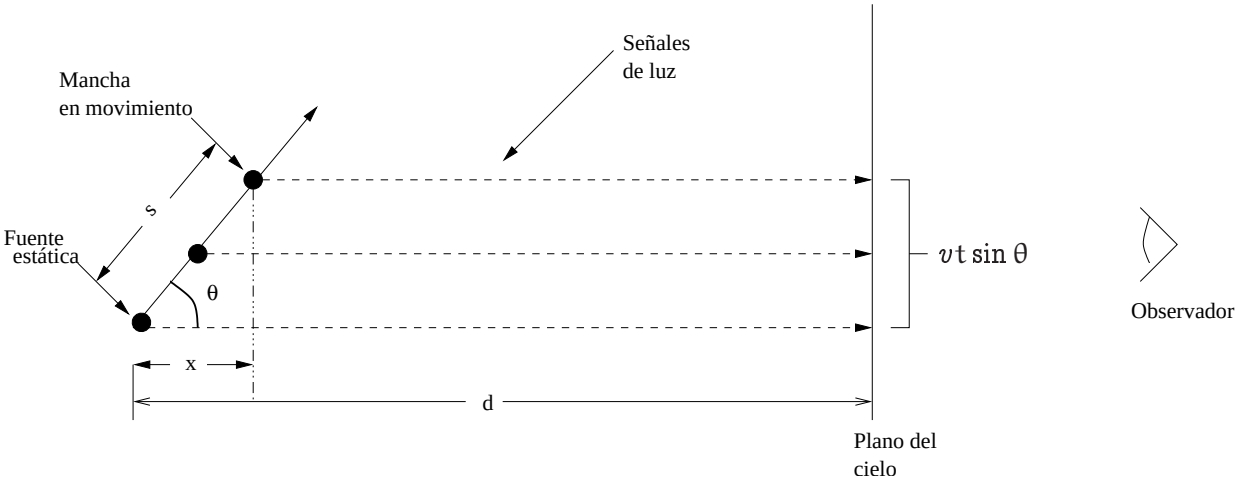

Figura II.1: Representación pictórica del modelo superlumínico de dos fuentes. El centro de la fuente se encuentra en reposo y la mancha que se expande hace un ángulo θ con respecto a la línea de visión del observador. Las señales de luz son emitidas por la mancha mientras ésta se mueve hacia el observador en la tierra.

Existen varias formas de resolver este problema, pero la más bonita es mediante *diagramas espacio–tiempo de Minkowski*. Como recordarás, éstos son diagramas espacio–tiempo en los cuales el eje horizontal representa las posiciones y el vertical identifica al tiempo t multiplicado por la velocidad de la luz c. De esta manera el problema es meramente geométrico. La Figura II.2 muestra el diagrama espacio–tiempo de esta situación.

Tarea 2

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

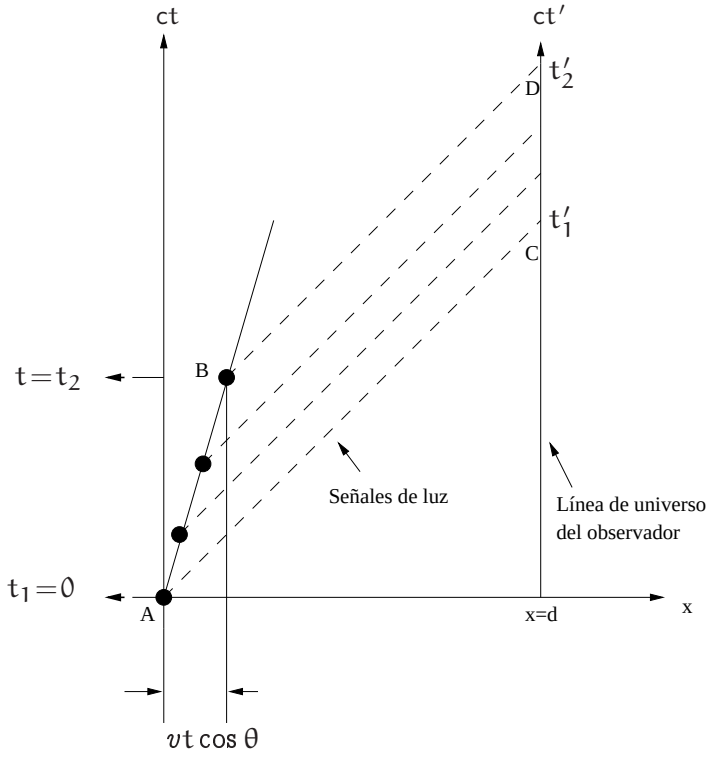

Figura II.2: Diagrama espacio–tiempo de Minkowski de el modelo de dos fuentes para movimientos superlumínicos. La *línea de universo* de la mancha en movimiento es representada por el segmento de línea AB Las señales de luz emitidas por la mancha en el punto A y B son observadas en la tierra en los puntos C y D respectivamente.

De la Figura II.2 *y utilizando la ecuación que describe al segmento* AC *se obtiene que en la línea de universo (i.e. la trayectoria de una partícula dibujada en el espacio–tiempo) del observador (es decir, cuando* $x = d$ *en el punto* C*)* $t'_1 = d/c$.

(1) *De la misma figura calcula la ecuación de la línea* BD *y obtén el valor del tiempo* t'_2 *en la línea de universo del observador.*

Por otra parte, si al tiempo $t_1 = 0$ *el núcleo emite radiación, esta misma será observada al tiempo* $t'_1 = d/c$ *por el observador en la tierra. Si* s *es la distancia que se ha movido la mancha en el tiempo* t_1 *y* v *su velocidad, entonces la radiación emitida por la fuente más tarde en un tiempo* $t_2 = s/v$ *será recibida en la tierra al tiempo* $t'_2 = t'_1 + t_2 - x/c$, *donde*

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

x es la distancia s proyectada a lo largo de la línea de visión del observador. El intervalo de tiempo que toma la mancha en recorrer esta distancia es

$$\Delta t_{em} = t_2 - t_1 = t_2, \tag{9.1}$$

y el tiempo observado en la tierra es

$$\Delta t_{obs} = t_2' - t_1'. \tag{9.2}$$

(II) *Sustituye las ecuaciones* (9.1)-(9.2) *en la relación que encontraste arriba para* t_2' *y encuentra la relación entre* Δt_{obs}, Δt_{em}, v, *y* θ.

Los astrónomos definen la velocidad observada v_{obs} *como el cociente entre la distancia proyectada en el plano del cielo por la mancha* $\Delta t_{em} v \sin\theta$ *entre el intervalo de tiempo medido en la tierra que tardó la mancha en cruzar dicha distancia. Sustituye esto en la fórmula previa y encuentra entonces una relación entre* v_{obs}, v, *y* θ.

(III) *Discute como la velocidad observada puede llegar a tener un valor más alto que la velocidad de la luz en el vacío. ¿Por qué? ¿Donde está el error? ¿Qué debe hacerse para corregir las observaciones?*

(IV) *Muestra que la velocidad de expansión aparente* v_{obs} *tiene un máximo para* $\theta = \arccos(v/c)$ *con un valor de* $v_{obs} = \gamma v$, *donde* $\gamma = \sqrt{\{1 - (v/c\}^2)}$ *es el Factor de Lorentz. Prueba que para este caso máximo, la velocidad aparente excede a la de la luz cuando la velocidad de la mancha es tal que* $v > c/\sqrt{2}$.

(V) *Finalmente muestra para que intervalos del ángulo* θ *pueden ser observados movimientos superlumínicos en la tierra y dibuja un diagrama de* θ *vs* v *(quizás sea más conveniente utilizar no directamente* θ *y* v *pero sí una función de los mismos...) que muestre pictóricamente este resultado.*

§10. Intervalos

Un *evento* en el espacio–tiempo está representado por las coordenadas (ct, x, y, z) de un espacio de cuatro dimensiones donde t es el tiempo y c la velocidad de la luz. En otras

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

palabras, un evento es un punto en este espacio de cuatro dimensiones que representa el tiempo y el lugar donde ocurrió algo. Este espacio de cuatro dimensiones es ficticio, pero resultará de gran utilidad en el estudio de la relatividad como pronto te darás cuenta. Los puntos de este espacio o los eventos se denominan *puntos de universo*. Una línea en este espacio se denomina *línea de universo*. Por ejemplo, en el espacio–tiempo de Minkowski, un objeto en reposo traza una línea vertical (solamente el tiempo avanza y el objeto no se mueve).

La manera matemática de representar la invariancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas de referencia inerciales es la siguiente. Consideremos dos eventos que ocurren en dos sistemas de refencia inerciales, K y K'. Supongamos que en el sistema K se envía una señal de luz. Esta señal sale del punto $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ al tiempo t_1. A un tiempo posterior t_2 la señal arriba al punto $x_2,\ y_2,\ z_2$. De esta manera, podemos escribir la relación matemática entre ambos eventos

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0. \tag{10.1}$$

De esta manera el *signo de la métrica* es escogido como $(+,\ -,\ -,\ -)$[†]. En el sistema de referencia K' la señal de luz sale del punto $(x_1',\ y_1',\ z_1')$ al tiempo t_1'. Esta señal arriba al punto $(x_2',\ y_2',\ z_2')$ cuando el reloj de este punto marca t_2'. De esta manera, la relación entre los eventos de salida y llegada del haz de luz en el sistema K' están relacionados por

$$c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_1' - x_2')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 = 0. \tag{10.2}$$

De las ecuaciones (10.2)-(10.1) es clara la similitud matemática que existe entre los intervalos de uno y otro sistema de referencia. Escribamos $\Delta t := t_2 - t_1$ y $\Delta l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$. Se define el *intervalo* Δs como un pedacito de espacio–tiempo tal que

[†]Evidentemente es lo mismo utilizar una notación en la cual el signo de la métrica sea $(-,\ +,\ +,\ +)$. A la fecha, no existe un consenso entre los físicos sobre que signo de la métrica utilizar (¿Habrá que llamar a una reunión de estándares internacionales?). En este curso utilizaremos $(+,\ -,\ -,\ -)$, pero la literatura varía con respecto a esto. Lo que importa es que tu sepas que hay diferencias de notación y que tu escojas una para tu vida y te adhieras a la misma, pero debe de quedarte claro que la física en ambas, y todos los resultados que se obtengan son los mismos.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2. \tag{10.3}$$

En el límite en el que los intervalos de tiempo y distancia son infinitesimalmente pequeños, la ecuación (10.3) toma la forma diferencial

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = c^2(dt)^2 - (dl)^2. \tag{10.4}$$

En el sistema de referencia inercial K', se define de manera análoga ds'. La forma de la ecuación (10.4) tiene toda la forma de un elemento de distancia (a pesar de que aparecen unos cuantos signos negativos en la misma). Por esta razón, podemos considerar al intervalo como un pedacito de un espacio de cuatro dimensiones, que se denomina comúnmente como *espacio–tiempo*. De hecho, la ecuación (10.4) muestra matemáticamente que el espacio y el tiempo están amalgamados en el mundo físico que nos rodea. En otras palabras no debe haber distinción alguna entre ambos conceptos[†].

Debido a que las cantidades ds y ds' son diferenciales de primer orden y como la condición $ds = 0$ implica que $ds' = 0$, necesariamente $ds = \alpha ds'$, donde α es una función. Esta última función no depende de las coordenadas, ni del tiempo pues esto significaría que diferentes tiempos y diferentes posiciones en el espacio no son equivalentes, en contradicción con la isotropía y homogeneidad del espacio y del tiempo. Tampoco debe depender de la dirección de la velocidad, de lo contrario se viola la isotropía del espacio. Por lo tanto se tiene que $ds = \alpha(v)ds'$.

Consideremos ahora tres sistemas de referencia inerciales K_1, K_2 y K_3. El sistema K_2 se mueve con velocidad v_{12} con respecto al sistema K_1. El sistema K_3 se mueve con velocidad v_{13} con respecto a K_1 y con velocidad v_{23} con respecto a K_2. De esta manera se obtiene

[†]Sin embargo, el hecho de que se haya amalgamado el espacio y el tiempo matemáticamente no quiere decir que el espacio y el tiempo sean equivalentes de manera física. De hecho, la marcada diferencia entre el espacio y el tiempo es clara. El espacio es tal que uno tiene libertad de movimiento hacia la derecha o izquierda, arriba o abajo, adelante o atrás. En otras palabras, uno tiene libertad de movimiento en cualquier dirección espacial. En el caso del tiempo no sucede así. La flecha del tiempo solamente apunta hacia una dirección: el futuro (o lo que es lo mismo, hacia donde crece la entropía de un sistema. Como veremos más adelante, al estudiar agujeros negros, resulta que existen ocasiones en las cuales uno puede moverse en direcciones arbitrarias en el tiempo (hacia el pasado o hacia el futuro) y justo en estos lugares no existe la arbitrariedad de movimiento en el espacio. En otras palabras, resulta que el espacio se comporta en ocasiones como el tiempo y el tiempo como el espacio. Es por esta razón que el espacio y el tiempo son equivalentes, no solamente matemáticamente, como lo muestra la ecuación (10.4) sino físicamente hablando.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

la relación matemática siguiente entre estos sistemas de referencia

$$ds_1 = a(v_{12})ds_2, \qquad ds_1 = a(v_{13})ds_3, \qquad ds_2 = a(v_{23})ds_3.$$

De aquí que

$$\frac{a(v_{13})}{a(v_{23})} = a(v_{12}). \tag{10.5}$$

Ahora bien, debido a que la velocidad v_{23} es una función que depende no solamente de la magnitud de las velocidades v_{12} y v_{13}, sino que también depende del ángulo entre éstas, entonces debido a que este ángulo no aparece en el lado izquierdo de la ecuación (10.5) se tiene que necesariamente $a(v)$ es una constante cuyo valor es la unidad de acuerdo a la misma ecuación.

Con esto, hemos mostrado el resultado importante de que los intervalos ds y ds′ medidos en dos sistemas de referencia K y K' respectivamente, y que se mueven con una cierta velocidad relativa entre sí, satisfacen la relación

$$ds = ds'. \tag{10.6}$$

Dicho de otro modo, el intervalo es un invariante a transformaciones entre sistemas de referencia inerciales: $s = s'$.

Tomemos ahora dos sistemas de referencia K y K' y consideremos dos eventos en el sistema K descritos por $(ct_1, \mathbf{r}_1)$ y $(ct_2, \mathbf{r}_2)$. En el sistema K' que se mueve con velocidad v con respecto a K, estos mismos eventos están descritos por $(ct'_1, \mathbf{r}'_1)$ y $(ct'_2, \mathbf{r}'_2)$ respectivamente. De esta manera los intervalos entre el evento 1 y el evento 2 en los sistemas K y K' pueden escribirse respectivamente como

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2,$$
$$\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2,$$

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

y debido a la invariancia del intervalo

$$c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2.$$

Veamos ahora si existe la posibilidad de encontrar un sistema de referencia K' tal que los dos eventos en K ocurran a distintos tiempos y a una misma posición en K'. En otras palabras, se requiere que $\Delta l' = 0$, por lo tanto

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 > 0. \tag{10.7}$$

Esto significa que un sistema de referencia con esta propiedad cumple con el hecho de que el intervalo es un número real. Los intervalos reales se denominan *como–tiempo*. Dos eventos que ocurren en un mismo cuerpo son siempre *como–tiempo* debido a que la distancia que se mueve el objeto entre el primer y segundo evento no puede ser mayor a $c\Delta t$, y por lo tanto $\Delta l < c\Delta t$.

Busquemos ahora un sistema de referencia K' de tal forma que los eventos 1 y 2 que ocurren en K se lleven acabo en posiciones diferentes, pero a un mismo tiempo en K'. En otras palabras, busquemos K' tal que $\Delta t' = 0$, con lo cual

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = \Delta l'^2 < 0. \tag{10.8}$$

Un sistema de referencia con esta propiedad tiene la propiedad de que el intervalo es un número imaginario. Los intervalos imaginarios se denominan *como–espacio*[†].

La división del espacio–tiempo en intervalos como–tiempo y como–espacio es muy importante en la física, sobre todo porque esta propiedad es un invariante relativista (es decir, preserva su característica en distintos sistemas de refencia). Por ejemplo, un intervalo que es como–tiempo en un sistema de refencia inercial, será como–tiempo en otro sistema de refencia inercial. Además en los intervalos como–tiempo dos eventos que ocurrieron uno después del otro son causales. Es decir, no existe un sistema de referencia en el cual el primer evento ocurra después que el segundo. Por esta razón es posible definir el pasado absoluto y el futuro absoluto de un evento como–tiempo. La Figura II.3 muestra esta situación para un

[†]Nota que si la métrica hubiese sido escogida como $(-,+,+,+)$ entonces los intervalos como–espacio serían reales y los como–tiempo serían imaginarios.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

evento en el origen. Las líneas a 45° representan líneas de universo de fotones. Dibujado en sus cuatro dimensiones, estas líneas se convierten en un cono, denominado frecuentemente como el *cono de luz*. Dentro de este cono, todos los eventos son como–tiempo y se refieren a movimientos por debajo de la velocidad de la luz (movimientos permitidos). Fuera del mismo, los eventos son como–espacio y corresponden a movimientos de partículas que viajan más rápido que la luz. Estos últimos movimientos no tienen sentido físicamente hablando y por lo tanto esta zona es una zona no permitida. Todos los eventos dentro del cono de luz que se encuentran por arriba del origen corresponden al futuro absoluto del evento en el origen y los debajo del origen son su pasado absoluto. Nota que la causalidad es posible de violar si un intervalo es como–espacio.

§11. Tiempo propio

Consideremos un sistema de referencia inercial K, en el cual se instalan relojes sincronizados[†]. Un reloj que se encuentra en otro sistema de referencia K' se mueve con velocidad v con respecto al sistema K. En el sistema K se mide un infinitesimal de tiempo dt en el cual el reloj en movimiento avanza una distancia $dl = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. El intervalo de tiempo dt' que marca el reloj en movimiento correspondiente es tal que $dl' = 0$. Con esto y utilizando el hecho de que el intervalo es un invariante relativista, entonces

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = ds'^2 = c^2dt'^2.$$

[†]Aunque ya te debe haber quedado claro, más vale dejarlo dicho. La manera de sincronizar relojes en un sistema de refencia inercial es la siguiente. Instalemos relojes en todos los puntos del espacio referidos a este sistema. Escojamos un reloj base, digamos un reloj que se encuentra en el origen de coordenadas. Cuando el reloj marca las 0hrs (por ejemplo), un haz de luz es disparado en todas las direcciones del espacio. A la distancia r del origen de coordinadas, justo cuando llega la señal de luz, todos los relojes deben marcar las 0hrs también. Haciendo esto para todos los relojes que se encuentran en cada punto del espacio se logra sincronizar a todos los relojes en un sistema de refencia inercial.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

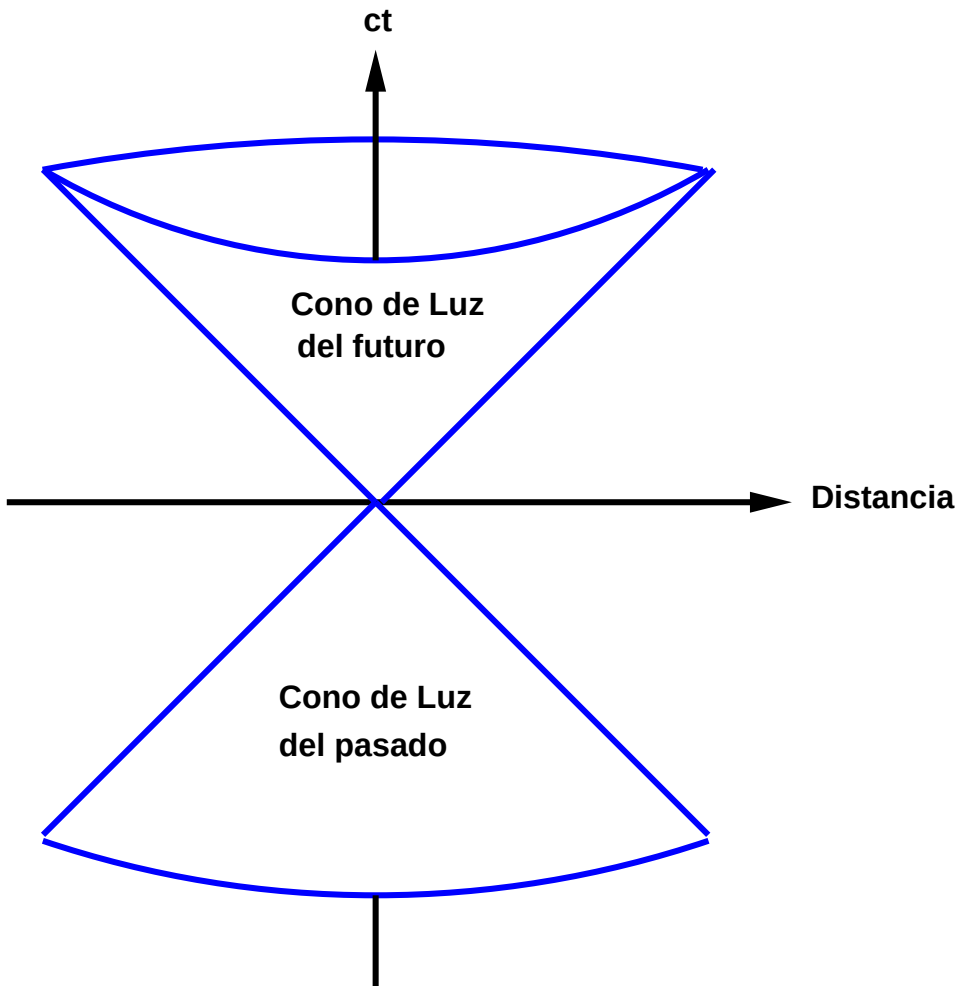

Figura II.3: Un evento (el origen) en el diagrama de Minkowski es atravesado por las líneas de universo de la luz. Estas líneas forman un cono cuando se toman las 4 dimensiones (un cono en 4 dimensiones). Los eventos dentro del cono de luz son como–tiempo (eventos físicamente permitidos) y los de fuera del cono son eventos como–espacio (eventos físicamente prohibidos).

De aquí que

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dl^2}{c^2 dt^2}}.$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Pero como $dl^2/dt^2 = v^2$ entonces

$$d\tau := dt' = ds/c = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{11.1}$$

Integrando esta ecuación se obtiene la relación que existe entre la diferencia de tiempos $(t_2 - t_1)$ medidos en K y la diferencia de tiempos $(t'_2 - t'_1)$ correspondientes en K'

$$\tau_2 - \tau_1 = t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{11.2}$$

El tiempo $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ medido por un reloj en movimiento con respecto a varios relojes en reposo en un sistema de refencia inercial se denomina *tiempo propio*. Es claro de la ecuación (11.2) que el tiempo propio es menor al tiempo correspondiente observado en el sistema K. Dicho de otro modo, un reloj en movimiento camina más lento que varios relojes en reposo que se encuentran en un sistema de referencia inercial dado.

La situación vista desde el sistema de referencia K' no es la misma. Para esto, montémonos en el sistema de referencia K', donde únicamente se encuentra un reloj, el cual está siendo comparado con diferentes relojes colocados en K. Es claro que la situación no es simétrica y por lo tanto un observador en K' no vería que los relojes en K caminan más lento con respecto a él. Por ejemplo, supongamos que el metro de la ciudad de México viaja a una velocidad constante de $0.5c$ entre la estación Universidad y la estación Indios Verdes. Consideremos que los relojes en los andenes de estas estaciones han sido sincronizados. Un pasajero sincroniza su reloj en la estación Universidad antes de subirse al metro. Al llegar a la estación Indios Verdes el pasajero notará que en efecto, su reloj se encuentra atrasado con respecto al reloj de la estación Indios verdes.

El problema llega justamente cuando la comparación de los relojes se hace con un mismo reloj. Por ejemplo, si el reloj en movimiento realiza una trayectoria cerrada, entonces la comparación sería entre dos relojes solamente (es como ir en la línea 3 del metro, saliendo de Universidad, llegar a Indios Verdes y regresar a Universidad). En este caso, la comparación se realiza entre dos relojes únicamente: el reloj en movimiento y un sólo reloj en K. En otras palabras, podría creerse que el reloj en movimiento caminó más lento que el que está en reposo sobre K. Pero desde el punto de vista del sistema K' es el reloj en K quien se mueve y por lo tanto podría decirse que el reloj en K caminó más lento que el de K'.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Sin embargo, resulta que el movimiento en una trayectoria cerrada no se lleva acabo en un sistema de refencia inercial. Movimiento curvilíneo implica que el sistema de refencia es no–inercial. Como veremos más adelante, en la parte de relatividad general, los relojes que se encuentran en sistemas de referencia no–inerciales caminan más lento al compararlos con relojes fijos en un sistema de refencia inercial. De esta manera por ejemplo, si se encuentran dos gemelos en la tierra y uno de ellos hace un viaje a velocidades cercanas a las de la luz para visitar la estrella más cercana (Próxima Centauri), cuando regrese a la tierra, esta persona se verá más joven que su hermano gemelo. La contradicción aparente que surge de este problema fue muy famosa en la historia de la física y se le conoce como la *paradoja de los gemelos*.

De la ecuación (11.1) se sigue de manera general que el intervalo de tiempo medido por un reloj en movimiento y tomado entre dos puntos a y b del cuatro–espacio (es decir, a lo largo de la línea de universo del reloj en movimiento) está dado por

$$\frac{1}{c}\int_a^b ds. \tag{11.3}$$

Si el reloj está en reposo, entonces la línea de universo es una línea paralela al eje t. Si el reloj está en movimiento, entonces esta línea de universo es una curva con extremos a y b. Además como vimos, el intervalo de tiempo leído por un reloj en reposo es mayor que el intervalo de tiempo de un reloj en movimiento. En otras palabras, la integral (11.3) posee un valor máximo si se toma a lo largo de una trayectoria donde el reloj está en reposo (una línea paralela al eje t con puntos inicial a y final b). Cualquier otra trayectoria que tenga como punto inicial a y final b resultará en un valor inferior para la integral[†]. Evidentemente esto no es así en el espacio Euclidiano de tres dimensiones. De hecho, una trayectoria rectilínea corresponde a un mínimo (recuerda que la distancia entre dos puntos a y b se define como el mínimo de todas las posibles trayectorias para conectar a a y b). El carácter de máximo para el cuatro–espacio de Minkowski es debido a que el intervalo tiene signos positivos y negativos en vez de positivos como sucede en el caso Euclidiano.

[†]En ocasiones es bueno matar moscas con bombas nucleares, así es que hagamos la demostración de esto matemáticamente. La integral (11.3) puede escribirse como $\int_a^b L dt$ donde la función $L := (1/c)\, ds/dt = (1/c)\left(c^2dt^2 - dl^2\right)^{1/2}/dt = \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$ representa el Lagrangiano. Utilizando las ecuaciones de Euler–Lagrange $((d/dt)(\partial L/\partial v) = \partial L/\partial t)$ se obtiene que los extremos del funcional L corresponden a $v = c$ o $v = 0$. Claramente, el caso en el que la velocidad es igual a la velocidad de la luz corresponde a un mínimo, pues en ese caso $\int_a^b ds = 0$. El máximo $v = 0$ corresponde a una línea paralela al eje t.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

§12. Transformación de Lorentz

En mecánica no–relativista, la fórmula de transformación de un sistema de referencia inercial a otro se efectúa mediante la transformación de Galileo. Si el origen del tiempo se escoge justo cuando los orígenes de ambos sistemas, K y K' coinciden, esta transformación está dada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \boldsymbol{v}t, \qquad t = t' \tag{12.1}$$

donde t es el tiempo, $\mathbf{r}$ el vector posición y $\boldsymbol{v}$ la velocidad del sistema K' con respecto al sistema K. Las cantidades no primadas y las primadas se refieren a los sistemas de referencia K y K' respectivamente. Esta transformación no sirve en mecánica relativista pues no deja invariante al intervalo, además de que la suposición $t = t'$ viola el principio de relatividad de Einstein (cf. sección §9).

Busquemos entonces una transformación de tal manera que el intervalo sea una cantidad invariante. Como ds puede verse como la distancia entre dos eventos en el el cuatro–espacio, entonces sabemos que las transformaciones que dejan invariante a la distancia son traslaciones y rotaciones. Sin embargo, las traslaciones no son de interés pues corresponden precisamente a un reescalamiento del origen de coordenadas y de tiempo. Busquemos entonces una rotación en este espacio de cuatro dimensiones. Por un momento (y solamente en esta ocasión) escribamos al intervalo como $ds^2 = c^2dt^2 + d\lambda^2$ en donde hemos escrito $\lambda^2 = -l^2$. De esta manera, el espacio de Minkowski "puede" verse como un espacio euclidiano. Las rotaciones base que pueden hacerse en un espacio de cuatro dimensiones son rotaciones en los planos xy, zy, xz, tx, ty y tz. Cualquier otra rotación puede descomponerse en composiciones de estas seis. Las primeras tres rotaciones corresponden a rotaciones puramente espaciales y no son de interés para nosotros (pues no habría transformación del tiempo).

Por simplicidad, supongamos que el sistema K' se está moviendo sobre el eje x con una velocidad v con respecto a K. De esta manera, la transformación que estamos buscando debe ser una rotación que involucra al tiempo t y a la coordenada x en ambos sistemas de referencia (rotación en el plano xy). Por lo tanto, para transformar del sistema K al sistema K' se tiene que efectuar la siguiente operación (rotación) entre las coordenadas ct

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

y $\chi = ix$ (con $i^2 = -1$)

$$\begin{pmatrix} ct \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ \chi' \end{pmatrix},$$

en donde α es el ángulo de rotación. Escribiendo $\chi = ix$ y $\chi' = ix'$ se obtiene que

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\Psi & \sinh\Psi \\ \sinh\Psi & \cosh\Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}, \tag{12.2}$$

en donde $\Psi = -i\alpha$. La transformación (12.2) es la transformación buscada. Representa la "rotación" en el plano xt del espacio pseudo–euclidiano de cuatro dimensiones de Minkowski. Como el origen del sistema K' se mueve con velocidad v con respecto a K, entonces sustituyendo $x' = 0$, la ecuación (12.2) implica que $x = ct'\sinh\Psi$ y $ct = ct'\cosh\Psi$. Dividiendo estas ecuaciones y utilizando el hecho de que $v = x/t$ se obtiene entonces que $\tanh\Psi = v/c$. De aquí se sigue que $\sinh\Psi = \gamma v/c$ y $\cosh\Psi = \gamma$, en donde el *factor de Lorentz* γ está definido por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{12.3}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (12.2) se obtiene la transformación buscada, conocida como la *transformación de Lorentz*

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \gamma(t' + vx'/c^2). \tag{12.4}$$

La transformación inversa, en la cual se expresa x', y', z', t' como función de x, y, z, t se encuentra fácilmente cambiando v por $-v$ debido a que el sistema K se mueve con velocidad $-v$ con respecto a K'. Nota que en el límite cuando $c \to \infty$ las transformaciones de Lorentz se convierten en las transformaciones de Galileo. En el caso en que $v > c$ las coordenadas x y t son imaginarias. Esto expresa matemáticamente la imposibilidad de movimiento a velocidades mayores que las de la luz. Además cuando $v = c$ las transformaciones quedan indeterminadas.

Las transformaciones de Galileo cumplen con la propiedad de conmutatividad. En otras palabras, el resultado de aplicar primero una transformación de Galileo y luego otra no

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

depende del orden en el que se apliquen estas transformaciones. Esto no ocurre en el caso de las transformaciones de Lorentz. Esto se sigue del hecho de que la transformación de Lorentz constituye una rotación en el cuatro–espacio. En efecto, el resultado de aplicar dos rotaciones alrededor de ejes distintos depende del orden en el que se apliquen estas rotaciones. Únicamente cuando las rotaciones se efectúen sobre el mismo eje, entonces existe conmutatividad. Dicho de otro modo, solamente cuando los vectores velocidad $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ de las transformaciones sean paralelos entre si, existe la posibilidad de conmutación.

Consideremos ahora un reloj en reposo en el sistema K'. Tomemos dos eventos que ocurren en el mismo lugar en este sistema. La diferencia de tiempos entre estos eventos está dada por $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Busquemos ahora el correspondiente tiempo Δt que se observa en el sistema K. Utilizando las transformaciones de Lorentz (12.4), se obtiene que $t_{1,2} = \gamma(t'_{1,2} + vx'/c^2)$. De tal forma que

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \Delta t',$$

tal como se había mostrado en la ecuación (11.2): el reloj en movimiento camina más lento con respecto a los relojes instalados en el sistema en reposo. Este resultado es muy importante y se le denomina *la dilación del tiempo*.

Consideremos ahora que se quiere realizar la medición de una longitud de una varilla paralela al eje x del sistema K. Si las puntas de la varilla corresponden a posiciones x_1 y x_2 entonces la longitud de la misma en el sistema K está dada por $\Delta x = x_2 - x_1$. Determinemos ahora las coordenadas x'_1 y x'_2 de las puntas de la varilla en el sistema K' para un mismo tiempo t'. Utilizando las transformaciones de Lorentz se obtiene que $x_{1,2} = \gamma(x'_{1,2} + vt')$. De esta manera la longitud de la varilla $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ en el sistema K' satisface que $\Delta x = \gamma \Delta x'$. Para una varilla, se define la *longitud propia*[†] l_0 como la longitud de la varilla medida en un sistema de referencia en reposo. Así, como $l_0 = \Delta x$ y definiendo $l = \Delta x'$, se obtiene que

$$l_0 = \gamma l. \tag{12.5}$$

Por lo tanto, una varilla alcanza su máxima longitud cuando se mide en el sistema propio.

[†]En relatividad se utiliza el término *propio* cuando el valor de cualquier cantidad física está referido al lugar en el cual dicha cantidad se encuentra en reposo.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

Este resultado se conoce como la *contracción de Lorentz*. Como las direcciones ortogonales a la dirección del movimiento son invariantes de Lorentz, entonces el volumen V de un objeto se transforma mediante la siguiente fórmula

$$V_0 = \gamma V, \tag{12.6}$$

en donde V_0 representa el volumen propio del objeto en consideración.

Busquemos ahora formulas que relacionen la velocidad de una partícula de un sistema de referencia inercial a otro. Para esto, consideremos como antes que la velocidad del sistema K' con respecto a K es paralela al eje x y que tiene un valor ω. Supongamos que $\boldsymbol{v} = v_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ es la velocidad de una partícula en el sistema de referencia K y que $\boldsymbol{v'} = v'_\zeta \boldsymbol{e'}_\zeta$ es el valor de esta velocidad medida en el sistema de referencia K'. Diferenciando las transformaciones de Lorentz (12.4), se obtiene que

$$dx = \gamma(\omega)\left(dx' + v dt'\right), \qquad dy = dy', \qquad dz = dz', \qquad dt = \gamma(\omega)\left(dt' + v dx'/c^2\right),$$

donde $\gamma^2(w) = 1/(1 - \omega^2/c^2)$. Dividiendo las primeras tres igualdades por la última y utilizando el hecho de que $v_\alpha = dx_\alpha/dt$ y $v'_\alpha = dx'_\alpha/dt'$ se obtienen las fórmulas para la transformación de las velocidades de un sistema de referencia inercial K' a otro K

$$v_x = \frac{v'_x + \omega}{1 + v'_x\omega/c^2}, \qquad v_y = \frac{v'_y\gamma(\omega)}{1 + v'_x\omega/c^2}, \qquad v_z = \frac{v'_z\gamma(\omega)}{1 + v'_x\omega/c^2}. \tag{12.7}$$

Cuando $c \to \infty$ la ecuación (12.7) tiende a $v_x = v'_x + \omega$, $v_{y,z} = v'_{y,z}$ y $t = t'$, que corresponde a la ley de adición de velocidades en mecánica no–relativista. Es claro de las ecuaciones (12.7) que la suma de dos velocidades nunca excede la velocidad de la luz. El hecho de que en las fórmulas de adición de velocidades, las dos velocidades v_α y ω entren de manera no simétrica se debe a la no conmutatividad de las transformaciones de Lorentz.

Consideremos ahora una partícula en el sistema de referencia K' la cual se mueve sobre el plano xy (de hecho esta trayectoria plana se puede escoger para cualquier movimiento de la partícula siempre y cuando se considere un intervalo de tiempo suficientemente pequeño). En coordenadas polares, la velocidad en este sistema de referencia está dada por $\boldsymbol{v} = v\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + v\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta$ en donde r y θ representan la distancia al origen y el ángulo polar

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

respectivamente. En el sistema K', que se mueve con velocidad ω sobre el eje x con respecto a K, la velocidad de la partícula se puede escribir como $\boldsymbol{v'} = v' \cos\theta' \, \boldsymbol{e}_{r'} + v' \sin\theta' \, \boldsymbol{e}_{\theta'}$. De esta manera, utilizando la ecuación (12.7) se obtiene la relación entre la dirección de la velocidad de un sistema de referencia a otro

$$\tan\theta = \frac{v'\gamma^{-1}(\omega)\sin\theta'}{v'\cos\theta' + \omega}. \tag{12.8}$$

Para el caso de un haz de luz, se tiene que $v = v' = c$. En este caso se obtiene el fenómeno de *aberración de la luz* que consiste en la desviación que se produce en un haz de luz por pasar de un sistema de referencia inercial a otro[†]

$$\tan\theta = \frac{\gamma^{-1}(\omega)\sin\theta'}{\omega/c + \cos\theta'}. \tag{12.9}$$

De la ecuación (12.9) se sigue que $\sin\theta = \gamma^{-1}(\omega)\sin\theta'/\left(1 + \omega\cos\theta'/c\right)$ y que $\cos\theta = (\cos\theta' + \omega/c)/(1 + \omega\cos\theta'/c)$. De esta manera para el caso en que $\omega \ll c$ se obtiene a primer orden en ω/c que

$$\Delta\theta := \theta' - \theta \approx \sin\theta - \sin\theta' = -\frac{\omega}{c}\sin\theta'\cos\theta' \approx \frac{\omega}{c}\sin\theta'. \tag{12.10}$$

El ángulo $\Delta\theta$ es el ángulo de aberración y la ecuación (12.10) es la famosa fórmula para la aberración de la luz en la óptica geométrica.

§13. Cuatro–vectores

Un evento puede describirse por el conjunto de coordenadas $(ct,\ x,\ y,\ z)$. Esto puede verse como las componentes de un vector (radiovector) en un espacio de cuatro dimensiones. Sus componentes las denotamos por x^i y como mencionamos en la sección §7 los índices latinos toman valores $0,\ 1,\ 2,\ 3$. La selección la haremos aquí de la siguiente manera:

[†]Es curioso que George Lucas haya utilizado este hecho en su serie de películas *La guerra de las galaxias*. Por ejemplo cuando el Halcón Milenario (el sistema de referencia K) viaja a velocidades relativistas, se observa lo siguiente desde la ventana del mismo. Para esta nave, son las estrellas quienes se mueven a velocidades relativistas. Los rayos de luz provenientes de las estrellas entonces se observan a un ángulo $\theta \ll 1$ como lo muestra la ecuación (12.8). Por esto, en la ventana de la nave se ve que los rayos de luz provenientes de las estrellas se colapsan en un punto justo en el centro de la nave.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z. \tag{13.1}$$

Definimos la "longitud" de este radio vector como

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{13.2}$$

Evidentemente esta longitud no cambia con respecto a rotaciones del espacio cuatro–dimensional, particularmente es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

De manera general, un conjunto de cuatro cantidades A^i que se transforman como las componentes del radio vector x^i bajo transformaciones del espacio cuatro–dimensional se llama un *cuatro–vector*[†]. En otras palabras, bajo las transformaciones de Lorentz las componentes de este cuatro–vector se transforman como

$$A^0 = \frac{A'^0 + A'^1 w/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \qquad A^1 = \frac{A'^1 + A'^0 w/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \qquad A^2 = A'^2, \qquad A^3 = A'^3. \tag{13.3}$$

El cuadrado de la magnitud de cualquier cuatro–vector A^i se define como

$$(A'^0)^2 - (A'^1)^2 - (A'^2)^2 - (A'^3)^2. \tag{13.4}$$

Por conveniencia, introduzcamos ahora dos tipos de componentes para los cuatro–vectores, denostándolos por A^i y A_i. Estas componentes las definimos relacionadas unas a otras por

$$A^0 = A_0, \qquad A^\alpha = -A_\alpha. \tag{13.5}$$

Los cuatro–vectores A^i se llaman *contravariantes* y los A_i *covariantes*. Utilizando las ecuaciones (13.4)–(13.5) esto implica que el cuadrado de un cuatro–vector puede escribirse como $A^i A_i$, en donde la convención de suma explicita de Einstein ha sido utilizada. La regla más importante a recordar con respecto a esta convención es que de los pares de

[†]Esto no es de sorprenderse, pues como ya sabías un vector en el espacio Euclidiano de 3D es un conjunto de tres coordenadas que al hacer una rotación alrededor de alguno de los ejes coordenados, sus componentes se transforman de acuerdo a la fórmula de rotaciones.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

índices que se estén sumando, uno debe ser superíndice y el otro subíndice. Además, como siempre, no deben existir *nunca* más de dos índices repetidos en una ecuación matemática.

En completa analogía con la definición del cuadrado de la magnitud de un cuatro–vector, podemos definir el *producto escalar* de dos vectores como

$$a_i b^i = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3. \tag{13.6}$$

Es evidente que $a_i b^i = a^i b_i$. En otras palabras, uno puede intercambiar los índices superiores e inferiores siempre que estén repetidos.

De la ecuación (13.3) y la relación (13.5) se sigue que

$$A_0 = \frac{A'_0 - A'_1 w/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \qquad A_1 = \frac{A'_1 - A'_0 w/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \qquad A_2 = A'_2, \qquad A_3 = A'_3. \tag{13.7}$$

De aquí uno puede mostrar que el producto escalar $A^i B_i$ es un cuatro–escalar (invariante bajo rotaciones en el espacio cuatro–dimensional). Sin embargo, esto está de más, ya que este resultado es obvio si se ve la similitud entre el producto escalar entre dos vectores diferentes y el cuadrado $A_k A^k$.

Como es costumbre, la componente A^0 de un cuatro–vector se llama la *componente temporal* (de tiempo) y a cada una de las componentes A^α se les denomina *componentes espaciales*. El cuadrado de un cuatro–vector puede ser positivo, negativo o cero. Un cuatro–vector se denomina *como–tiempo*, *como–espacio* o *nulo* si su cuadrado es positivo, negativo o cero respectivamente (tal cual como se hace con el intervalo ds). Bajo rotaciones espaciales, las componentes A^α de un cuatro–vector se comportan como un tres–vector $\mathbf{A}$. La componente temporal de un cuatro–vector es un tres–escalar con respecto a estas transformaciones. Es por esta razón que frecuentemente uno escribe las componentes de un vector como $A^i = (A^0,\ \mathbf{A})$. Las componentes covariantes de este mismo vector son evidentemente $A_i = (A_0,\ -\mathbf{A})$ y el cuadrado del mismo cuatro vector es $(A^0)^2 - \mathbf{A}^2$. Las propiedades de los vectores en un espacio Euclidiano ya han sido discutidas anteriormente en §7 y como vimos, no hay necesidad de hacer diferencia entre covariante y contravariante en este caso.

Un *tensor cuatro–dimensional* de rango 2 es un conjunto de 16 cantidades A^{ik} que

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

bajo transformaciones de coordenadas, se comporta como las transformaciones del producto de dos vectores (por ejemplo, el producto $a^i b^k$). De la misma manera, esta definición puede ser generalizada para tensores de rango mayor.

Las componentes de un tensor de rango 2 se pueden escribir de forma contravariante A^{ik}, covariante A_{ik} y mixtas: $A^i{}_k$, $A_i{}^k$ y A^i_k. En este último caso es importante hacer la diferencia entre los distintos índices superiores e inferiores. De hecho, la última notación A^i_k es utilizada únicamente cuando no hay confusión alguna y esto ocurre cuando las componentes mixtas $A^i{}_k = A_i{}^k$, es decir cuando el tensor es *simétrico*: $A^{ik} = A_{ik}$. Se dice que un tensor es *antisimétrico* cuando $A^{ik} = -A_{ik}$, lo cual implica que las componentes con ambos índices iguales son nulas.

De la misma manera que para cuatro–vectores, toda ecuación que contenga tensores, debe tener índices libres idénticos arriba y abajo. Estos mismos pueden moverse libremente hacia arriba o hacia abajo, siempre y cuando se haga lo mismo de ambos lados de la igualdad. Si por alguna razón llegas a ver que estas igualando componentes covariantes con contravariantes en una ecuación, algo está severamente mal.

La *contracción* de un tensor $A^i{}_i$ es llamada *traza* del tensor. Evidentemente, el producto escalar de dos cuatro–vectores es una contracción pues el escalar $A_i B^i$ es formado al contraer el cuatro–tensor $A_i B^k$.

El *tensor unitario de rango 2*, o delta de Kronecker δ^i_k, es tal que para cualquier cuatro–vector $\delta^i_k A^k = A^i$. Esto implica que sus componentes son tales que $\delta^i_k = 1$ sí $i = k$ y $\delta^i_k = 0$ sí $i \neq k$.

Subiendo o bajando los índices del tensor unitario δ^i_k uno puede obtener el tensor simétrico g^{ik} o g_{ik} llamado el *tensor métrico*. Es fácil ver que

$$g^{ik} = g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} := \text{diag}\,(1,\ -1,\ -1,\ -1). \tag{13.8}$$

De aquí se sigue la fórmula para subir y bajar índices

$$g_{ik} A^k = A_i, \qquad g^{ik} A_k = A^k, \tag{13.9}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

la cuál implica que por ejemplo el intervalo pueda escribirse como[†]

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k. \tag{13.10}$$

Una de las propiedades que hace especiales a los tensores δ^i_k, g^{ik}, y g_{ik} es que son los mismos en cualquier sistema de coordenadas (pues así fueron escogidos). Otro tensor que cumple con este hecho es el *tensor unitario completamente antisimétrico* o tensor de Levi–Civita ϵ^{iklm}. Al igual que su contraparte en tres dimensiones, este tensor es tal que cambia de signo ante el intercambio de cualquiera de sus índices. De la antisimetría se sigue que todas las componentes en las cuales dos índices son repetidos, vale cero. Así pues, las únicas componentes no nulas son aquellas en las cuales todos los índices son diferentes. Es costumbre definir

$$\epsilon^{0123} = +1. \tag{13.11}$$

De esta manera, las componentes de este tensor son $+1$, o -1 si los índices pueden llevarse al arreglo 0123 mediante una permutación par o impar respectivamente. El número de todas las componentes no nulas es claramente $4!$ De esta manera, la contracción

$$\epsilon^{iklm}\epsilon_{iklm} = -4! \tag{13.12}$$

Con respecto a rotaciones del sistema de coordenadas, el tensor ϵ^{iklm} se comporta como un tensor, pero no lo es así mediante reflexiones debido a que las componentes de un tensor deben cambiar de signo ante estas mismas y por definición este tensor es el mismo en cualquier sistema coordenado.

Estrictamente hablando, este tensor no es un tensor, es un *pseudotensor*, es decir, se comporta como un tensor mediante rotaciones del sistema coordenado, excepto aquellas que no pueden ser reducidas a rotaciones (i.e. reflexiones).

El producto $\epsilon^{iklm}\epsilon^{prst}$ forma un tensor (verdadero) de rango 8. La contracción de uno o más pares de índices da tensores de rango 6, 4, 2 y 0 cuyas componentes son 0, ± 1 (un tensor de rango cero es un escalar). Debido a esto, las componentes de estos tensores

[†]Claramente también pude escribirse como $ds^2 = g^{ab}dx_a dx_b$ sin embargo es conveniente escribirlo como lo muestra la ecuación (13.10) para evitar una confusión un poco delicada que sucede en los espacios curvos como veremos más adelante.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

deben ser proporcionales a productos de δ^i_k, ya que es el único tensor verdadero cuyas componentes son las mismas en todo sistema de referencia. No es complicado mostrar que

$$\epsilon^{iklm}\epsilon_{pklm} = -3!\,\delta^i_p, \quad \epsilon^{iklm}\epsilon_{prlm} = -2!\det\begin{bmatrix}\delta^i_p & \delta^i_r\\ \delta^k_r & \delta^k_p\end{bmatrix},$$
$$\epsilon^{iklm}\epsilon_{prsm} = -1!\det\begin{bmatrix}\delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s\\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s\\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s\end{bmatrix}, \quad \epsilon^{iklm}\epsilon_{prst} = -0!\det\begin{bmatrix}\delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t\\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t\\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s & \delta^l_t\\ \delta^m_p & \delta^m_r & \delta^m_s & \delta^m_t\end{bmatrix}. \tag{13.13}$$

El *determinante* de un tensor A_{ik} de rango 2 es el determinante de la matriz formada por sus componentes. En completa analogía con la ecuación (7.6) este determinante está dado por

$$\det(A_{ik}) = \epsilon^{ikmp}A_{i0}A_{k1}A_{m2}A_{p3}. \tag{13.14}$$

De esta manera, las ecuaciones (7.7)-(7.8) se generalizan respectivamente como

$$\epsilon^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = -\epsilon_{iklm}\det\left(A_{kl}\right), \tag{13.15}$$

$$\epsilon^{iklm}\epsilon^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = 4!\det\left(A_{kl}\right). \tag{13.16}$$

Si A^{ik} es un tensor *antisimétrico*, entonces este tensor y el pseudotensor $A^{*ik} := \frac{1}{2}\epsilon^{iklm}A_{lm}$ entonces se dice que ambos tensores son *duales* uno al otro. De la misma manera, $\epsilon^{iklm}A_m$ es un pseudotensor antisimétrico de rango 3 dual al vector A^i. El producto $A^{ik}A^*_{ik}$ es evidentemente un pseudoescalar.

El *cuatro–gradiente* de un escalar ξ se define como el cuatro–vector

$$\partial\xi/\partial x^i = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\xi}{\partial t}, \nabla\xi\right). \tag{13.17}$$

La *diferencial* de un escalar $d\xi$

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x^i} dx^i, \tag{13.18}$$

es también un escalar ya que es la contracción de dos vectores. El divergente del vector A^i se define como $\partial A^i/\partial x^i$[†].

En el espacio Euclidiano de tres dimensiones uno puede integrar a lo largo de una curva, al rededor de un área y dentro de un volumen. La generalización en el espacio de cuatro dimensiones como lo hemos definido hasta ahora se lleva a cabo de la siguiente manera

☆ *Integral sobre una curva en el cuatro–espacio.* ➜ En este caso el elemento de integración es el elemento de línea que es el vector dx^i.

☆ *Integral sobre una superficie de dos dimensiones en el cuatro–espacio.* ➜ Para buscar el elemento de integración en este caso es importante observar lo que sucede en el espacio Euclidiano de tres dimensiones. En este espacio la proyección del área que hace el paralelogramo formado por los vectores $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}'$ en los planos coordenados $x_\alpha x_\beta$ está dada por $dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha$. De la misma manera, en el cuatro–espacio el elemento de área está dado por el tensor antisimétrico $df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$. Las componentes de este tensor son las proyecciones del elemento de área en cada uno de los planos coordenados. Sin embargo, en el tres–espacio, uno no utiliza el tensor $df^{\alpha\beta} = dx^\alpha dx'^\beta - dx^\beta dx'^\alpha$ como elemento de integración, sino el vector df_α que es dual a este tensor $df_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Geométricamente, este es un vector normal al elemento de superficie e igual en magnitud al área del elemento. En el cuatro–espacio no es posible construir este vector, sin embargo uno puede construir el tensor dual df^{*ik} al tensor df^{ik}

$$df^{*ik} = \frac{1}{2}\epsilon^{iklm} df_{lm}. \tag{13.19}$$

De la misma manera, este tensor describe a un elemento de área igual y normal al elemento de la superficie df^{ik}. Esto último es claro ya que $df^{ik} df^*_{ik} = 0$.

☆ *Integral sobre una hipersuperficie de tres dimensiones.* ➜ El volumen del paralelepípedo que forman tres vectores $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}'$, $d\mathbf{r}''$ está dado por $(d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}''$, que puede

[†]En general uno utiliza siempre las componentes covariantes del cuatro–operador $(\partial/\partial x^i)$. En raras ocasiones se habla de la derivada con respecto a la componente contravariante. Para este caso el operador de diferenciación es $\partial/\partial x_i = (\partial/c\partial t, -\nabla)$.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

escribirse como

$$\det\begin{bmatrix} dx_\alpha & dx'_\alpha & dx''_\alpha \\ dx_\beta & dx'_\beta & dx''_\beta \\ dx_\gamma & dx'_\gamma & dx''_\gamma \end{bmatrix} := dS_{\alpha\beta\gamma}. \tag{13.20}$$

Si ahora pensamos en este volumen como *sumergido* en un espacio cuatro–dimensional, entonces podemos decir que la proyección del paralelepípedo –es decir, el "*área*" de la hipersuperficie– generada por los cuatro–vectores dx^i, dx''^i, y dx''^i está dada por los determinantes

$$\det\begin{bmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{bmatrix} := dS^{ikl}. \tag{13.21}$$

Es conveniente utilizar como elemento de integración sobre la hipersuperficie el cuatro–vector dS^i dual al tensor dS^{iklm} dado por

$$dS^i = -\frac{1}{6}\epsilon^{iklm}dS_{klm}, \qquad dS_{klm} = \epsilon_{nklm}dS^n. \tag{13.22}$$

Geométricamente dS^i es un cuatro–vector igual en magnitud a las "*caras*" del elemento de hipersuperficie y normal al mismo. De la definición anterior se sigue que $dS^0 = dS^{123} = dxdydz$. En otras palabras, éste es el elemento de volumen dV en el tres–espacio. Este volumen es justamente la proyección del elemento de la hipersuperficie en cuestión en el hiperplano $x^0 = \text{const}$.

☆ *Integral sobre un volumen de cuatro dimensiones.* ➜ Evidentemente el elemento de integración está dado por

$$d\Omega := dx^0dx^1dx^2dx^3 = c\,dt\,dV. \tag{13.23}$$

Es fácil ver que este elemento es un escalar. Bajo cualquier transformación de las variables de integración no primadas a las primadas, el elemento de integración cambia a

$$Jd\Omega' = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\,dx'^0dx'^1dx'^2dx'^3,$$

Para una transformación lineal de la forma $x'^i = a^i_k x^k$, el Jacobiano J es justamente el determinante $\det[a^i_k]$. Este mismo es la unidad para rotaciones del sistema coordenado.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

De la misma manera que existen los Teoremas de *Gauss* y *Stokes* para el espacio Euclídeo de tres dimensiones, es posible generalizarlos al espacio cuatro–dimensional de manera natural.

La integral sobre una hipersuperficie de tres dimensiones cerrada se transforma en una integral sobre el cuatro–volumen contenido dentro de la misma haciendo el siguiente cambio en la integral

$$dS_i \longrightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{13.24}$$

Por ejemplo, la integral de un tensor M^{ip}

$$\oint M^{ip} dS_i = \int \frac{\partial M^{ip}}{\partial x^i} d\Omega. \tag{13.25}$$

Esta última identidad, generaliza el *Teorema de Gauss*.

La integral sobre una superficie de dos dimensiones puede transformarse en la integral sobre cualquier hipersuperficie de tres dimensiones que tenga como frontera a esta dos–superficie. Esto se hace mediante el siguiente cambio

$$df^*{}_{ik} \longrightarrow dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{13.26}$$

La integral sobre una curva cerrada en el espacio de cuatro–dimensiones se transforma en una integral sobre cualquier superficie de dos dimensiones cuya frontera sea la curva en consideración

$$dx^i \longrightarrow df^{*ki} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{13.27}$$

Así pues, la integral de línea de un vector M^i puede ser transformada de la siguiente manera

$$\oint M_i dx^i = \int df^{*ik} \frac{\partial M_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \int df^{*ik} \left\{ \frac{\partial M_k}{\partial x^i} - \frac{\partial M_i}{\partial x^k} \right\}, \tag{13.28}$$

que es la generalización del *Teorema de Stokes*.

Las ventajas de utilizar un espacio de cuatro dimensiones para hacer nuestras matemáticas es clara y lo será aún más a lo largo de tu carrera científica. Comencemos con

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

una simple aplicación. Definimos la *cuatro–velocidad* de una partícula en movimiento como el cuatro–vector u^k dado por

$$u^k = \frac{dx^i}{ds}. \tag{13.29}$$

¡Esta definición implica que la cuatro–velocidad es una cantidad adimensional! Utilizando la ecuación (11.1) se obtiene que $\gamma(v)ds = cdt$ en donde v es la tres–velocidad de la partícula. Sustituyendo esto en la ecuación (13.29) se obtienen las componentes de la cuatro–velocidad

$$u^k = \left(\gamma, \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right) = \gamma\left(1, \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right). \tag{13.30}$$

Dividiendo la ecuación (13.10) por ds^2 se obtiene que

$$u^k u_k = 1, \tag{13.31}$$

es decir, el cuatro–vector de velocidad es un vector unitario que es tangente a la línea de universo x^k trazada por una partícula. Se define la *cuatro–aceleración* w^k como la derivada de la cuatro–velocidad con respecto al intervalo, es decir,

$$w^k = \frac{d^2x^k}{ds^2} = \frac{du^k}{ds}. \tag{13.32}$$

De la ecuación (13.31) se sigue que

$$u^l w_l = 0. \tag{13.33}$$

Esto significa que la cuatro–velocidad y la cuatro–aceleración son cuatro–vectores ortogonales entre sí.

§14. Mecánica relativista

El *principio de mínima acción* es utilizado para encontrar la ecuación de movimiento de una (o varias) partículas en movimiento en mecánica no–relativista. Ya que este principio es de carácter general en la física, debe se valido en mecánica relativista también.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

Para encontrar la acción de una partícula libre observemos que la acción S no debe depender del sistema de referencia que se toma, es decir, debe ser invariante mediante transformaciones de Lorentz. En otras palabras, esta acción debe ser un escalar. El integrando de la acción debe ser una diferencial del primer orden. Naturalmente, el único escalar de primer orden invariante a transformaciones de Lorentz con el cual hemos trabajado hasta ahora es ds. En otras palabras, la acción debe escribirse como

$$S = -\alpha \int_a^b ds, \tag{14.1}$$

donde α es una constante de proporcionalidad y la integral es tomada a lo largo de una línea de universo entre dos eventos a y b. Es obvio que α es un escalar positivo ya que la integral $\int_a^b ds$ toma el valor máximo a lo largo de una línea recta como vimos en la sección §11. Si α fuese negativo entonces la integral (14.1) nunca alcanzaría un mínimo como lo demanda el principio de mínima acción. La acción S puede escribirse como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \tag{14.2}$$

donde L es el *Lagrangiano* del sistema. De las ecuaciones (14.1)-(14.2) se obtiene que

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - v^2/c}. \tag{14.3}$$

donde v es la velocidad de la partícula en cuestión. Para calcular α tomemos el límite cuando $c \to \infty$ y comparémoslo con el Lagrangiano Newtoniano, es decir,

$$L \to -\alpha c + \alpha v^2/2c, \qquad \text{cuando } c \to \infty. \tag{14.4}$$

El primer término del lado derecho de esta ecuación puede ser despreciado pues es una constante (las constantes no alteran al Lagrangiano). De esta manera y como $L = mv^2/2$ en mecánica no–relativista (donde m es la masa de la partícula), se sigue que $\alpha = mc$.

Tarea 3

(1) Calcula el momento $\mathbf{p}$ *de una partícula libre en mecánica relativista utilizando el*

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

hecho de que $\mathbf{p} = \partial L/\partial \boldsymbol{v}$.

(II) *La energía* E *de una partícula está dada por*

$$E = \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{v} - L. \tag{14.5}$$

Calcula su valor en mecánica relativista y muestra que cuando la velocidad de la partícula tiende a cero, esta energía tiene un valor en reposo *igual a* $E = mc^2$. *Encuentra el valor de esta energía para velocidades pequeñas* $v/c \ll 1$ *y verifica que este valor corresponde con la energía cinética de una partícula libre en mecánica no–relativista.*

(III) *Muestra que cuando la velocidad de la partícula alcanza la velocidad de la luz, el momento y la energía tienden a infinito. En otras palabras, las partículas con masa finita no pueden viajar a la velocidad de la luz.*

Para hacer el cálculo en cuatro dimensiones, variemos la acción (14.1) escribiendo esta variación como δ para no confundirnos con las demás diferenciales, es decir,

$$\delta S = -mc\delta\int_a^b ds = 0.$$

Utilizando la ecuación (13.10) se obtiene que $ds\,\delta(ds) = dx^i\,\delta dx_i$ y por lo tanto

$$\delta S = -mc\int_a^b \frac{dx_i\delta dx^i}{ds} = -mc\int_a^b u_i d\delta x^i = -mc\left\{u_i\delta x^i\Big|_a^b + \int_a^b \delta x^i\frac{du_i}{ds}ds\right\}, \tag{14.6}$$

donde u_i es la cuatro–velocidad y la última igualdad del lado derecho en la ecuación previa se obtuvo integrando por partes. Debido a que $\delta x_i|_a = \delta x_i|_b = 0$ (la variación se lleva a cabo para distintas trayectorias con puntos fijos a y b) y como $\delta S = 0$, de aquí se sigue que la ecuación de movimiento para una partícula libre está dada por

$$du_i/ds = 0, \qquad \text{o bien} \qquad u_i = \text{ const.} \tag{14.7}$$

Esta ecuación expresa el hecho de que una partícula que se mueve en un sistema de referencia inercial lo hace con velocidad constante.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Para determinar la variación de la acción como función de las coordenadas, dejemos el punto a fijo y se variemos el punto b. De esta manera

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i. \tag{14.8}$$

De mecánica no–relativista, sabemos que el tres–momento está dado por $\partial S/\partial \mathbf{r}$ y que la energía (Hamiltoniano) está dada por $-\partial S/\partial t$. En mecánica relativista, definimos el *cuatro–momento* (o vector energía–momento) como

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}. \tag{14.9}$$

Sus componentes están dadas por $p^i = (E/c,\ \mathbf{p}) = mcu^i$, donde $\mathbf{p}$ es el tres–momento. Evidentemente $p^i p_i = m^2c^2$.

La *cuatro–fuerza* g^i se define como

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\frac{du^i}{ds} = \left(\mathbf{f}\cdot \boldsymbol{v}\gamma/c^2,\ \mathbf{f}\gamma/c\right), \tag{14.10}$$

donde $\mathbf{f}$ es el tres–vector fuerza y $\gamma = \sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ es el factor de Lorentz de la partícula en movimiento.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Capítulo III

Electromagnetismo.

El hecho de que las interacciones producidas por las fuerzas en la física viajen a una velocidad finita máxima, la velocidad de la luz, tiene consecuencias muy importantes sobre el concepto de campo. En mecánica no–relativista, donde las interacciones se transmiten inmediatamente a todo el espacio, resulta que cuando las partículas que producen el campo se mueven, el resultado de su movimiento es transmitido inmediatamente a todo el espacio y por lo tanto el campo toma su configuración nueva de manera inmediata. En otras palabras, el campo es una mera construcción matemática.

En mecánica relativista, las interacciones entre diversas partículas en un campo no se llevan acabo de manera inmediata. Por lo tanto, si alguna de las partículas en interacción se mueve, la información de su movimiento tardará un cierto tiempo en llegar a las demás partículas. Antes del arrivo de la información, las demás partículas se comportarán como si la primer partícula se encontrará en su posición antigua. Dicho de otro modo, el campo cerca de estas partículas se mantiene sin cambio. Es hasta un tiempo después cuando el campo comienza a reajustarse como debería. Por esta razón el campo en mecánica relativista deja de ser un artificio matemático. Por el contrario, debido a que la transmisión de información se efectúa en un tiempo finito, el campo tiene sentido físico como tal. En otras palabras, en mecánica relativista, los campos ¡existen físicamente!

§15. Movimiento en un campo electromagnético

Supongamos que se tiene un campo electromagnético y que una partícula con carga (positiva, negativa o cero) e se mueve en el mismo. La acción S que describe este movimiento debe estar dada por dos términos aditivos. Uno de estos términos está claramente dado por la acción (14.1) de una partícula libre en ausencia de campos. El otro término describe la interacción de la partícula con el campo electromagnético. Las propiedades del campo están dadas por el *cuatro–vector potencial electromagnético* A^k, que es una función de las coordenadas del espacio–tiempo x^l. El experimento muestra que esta acción está dada por $-(e/c)\int_a^b A_k dx^k$. De esta manera, la acción total de una partícula que se mueve en un campo electromagnético está dada por

$$S = \int_a^b \left\{ -mc\,ds - \frac{e}{c} A_q dx^q \right\}, \tag{15.1}$$

entre dos puntos a y b del espacio–tiempo. Las componentes espaciales y la componente temporal del cuatro–vector A^i forman un tres–vector y un escalar verdaderos respectivamente. Es costumbre escribir

$$A^r = (\phi, \mathbf{A}), \tag{15.2}$$

donde la función escalar ϕ se denomina el *potencial escalar del campo electromagnético* la tres–función vectorial $\mathbf{A}$ constituye el *potencial vectorial* de este mismo campo. Con esto, y usando el hecho de que $d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{v}$, la ecuación (15.2) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \left\{ -mc\,ds - e\phi dt + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \right\}, \\ &= \int_a^b \left\{ -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - e\phi + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{v} \right\} dt, \end{aligned} \tag{15.3}$$

y por lo tanto el Lagrangiano L de una partícula que se mueve en un campo electromagnético está dado por

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - e\phi + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{15.4}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

La ecuación de movimiento de la partícula está dada por las ecuaciones de Euler–Lagrange[†]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \boldsymbol{v}}\right) = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathbf{r}}. \tag{15.5}$$

De la ecuación (15.4) se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{e}{\mathrm{c}}\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}) - e\,\mathbf{grad}\phi,\\ &= \frac{e}{\mathrm{c}}\,(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad})\,\boldsymbol{A} + \frac{e}{\mathrm{c}}\boldsymbol{v}\wedge\mathbf{curl}\,\boldsymbol{A} - e\,\mathbf{grad}\phi.\end{aligned}$$

Con esto, la ecuación de Euler–Lagrange (15.5) está dada por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{\mathrm{c}}\boldsymbol{A}\right) = \frac{e}{\mathrm{c}}\,(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A} + \frac{e}{\mathrm{c}}\boldsymbol{v}\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}) - e\,\nabla\phi. \tag{15.6}$$

en donde $\mathbf{p}$ es el tres–momento de la partícula cuando se mueve libremente (cf. Tarea 3). La derivada $\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t$ es la razón de cambio en el tiempo del tres–vector potencial $\boldsymbol{A}$ que se lleva a cabo no sólo a posiciones fijas ($\partial\boldsymbol{A}/\partial t$), sino también la razón de cambio en el tiempo a lo largo de las posiciones en el campo ($(\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t)\cdot\nabla\boldsymbol{A}$). En otras palabras, esta derivada es la derivada total con respecto al tiempo: $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla$. Con esto, la ecuación (15.6) se reduce a

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{\mathrm{c}}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - e\,\nabla\,\phi + \frac{e}{\mathrm{c}}\boldsymbol{v}\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A})\,. \tag{15.7}$$

Esta es la ecuación de movimiento de una partícula en un campo electromagnético. Se denomina la *ecuación de Lorentz* o *fuerza de Lorentz*. El lado izquierdo de esta ecuación tiene la taza de cambio del momento de la partícula con respecto al tiempo y por lo tanto el lado derecho debe ser igual a la fuerza que ejerce el campo electromagnético sobre la partícula mientras se mueve a lo largo del campo. El primer y segundo término de la ecuación (15.7) no dependen explícitamente de la velocidad. A este tipo de fuerza se le denomina fuerza eléctrica. La intensidad del *campo eléctrico* vectorial $\mathbf{E}$ se define como

[†]Por si acaso no te ha quedado aún claro, aquí se está escribiendo $\partial\mathrm{L}/\partial\boldsymbol{v} := \boldsymbol{e}_\mu\partial\mathrm{L}/\partial v_\mu$, y la coordenada $\mathbf{r}$ se deja fija (i.e. esta operación significa tomar los gradientes de L con respecto a la velocidad, dejando fija la posición). De la misma manera $\partial\mathrm{L}/\partial\mathbf{r} := \boldsymbol{e}_\alpha\partial\mathrm{L}/\partial x_\alpha$ cuando $\boldsymbol{v}$ está fija.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\,\phi. \tag{15.8}$$

El tercer término de la ecuación (15.7) depende explícitamente de la velocidad. A este tipo de fuerza se le conoce como fuerza magnética. La intensidad del *campo magnético* vectorial $\mathbf{B}$ se define como

$$\mathbf{B} = \mathbf{curl}\,\boldsymbol{A}. \tag{15.9}$$

Utilizando las ecuaciones (15.8)-(15.9) se obtiene la famosa relación para la ecuación de Lorentz

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}. \tag{15.10}$$

En mecánica, las ecuaciones de movimiento son invariantes ante la transformación $t \to -t$. Es decir, ambas direcciones del tiempo (pasado y futuro) son equivalentes. Utilizando la ecuación (15.10) es fácil ver que esto también es válido para el caso del campo electromagnético. En efecto, si se hacen los cambios

$$t \to -t, \qquad \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} \to -\mathbf{B}, \tag{15.11}$$

entonces utilizando la ecuación (15.10) se ve que la ecuación de movimiento permanece invariable. Los cambios en los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en la ecuación (15.11) corresponden a

$$\phi \to \phi, \qquad \boldsymbol{A} \to -\boldsymbol{A}. \tag{15.12}$$

En otras palabras, un posible movimiento en el campo electromagnético existe si el movimiento reversible (con $t \to -t$) es tal que la dirección del campo magnético $\mathbf{B}$ es cambiada.

Por otra parte, si hacemos el cambio

$$A_q \longrightarrow A_q - \frac{\partial f}{\partial x^q}, \tag{15.13}$$

en la acción (15.1), entonces la acción cambia de la siguiente manera

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$S \longrightarrow S + \frac{e}{c}\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k = S + \frac{e}{c}\cancel{\int_a^b df}. \tag{15.14}$$

El último término de la ecuación (15.14) se puede despreciar por ser una diferencial exacta, la cual no tiene efecto en las ecuaciones de movimiento (la variación de una diferencial exacta es idénticamente igual a cero pues los extremos a y b de la curva de integración se toman fijos al variar la acción). En otras palabras, el cambio hecho en la ecuación (15.13) no altera las ecuaciones de movimiento. Se dice entonces que el campo electromagnético es invariante a *transformaciones de norma*. Utilizando la ecuación (15.2), entonces la igualdad (15.13) toma la forma

$$\mathbf{A} + \mathbf{grad}\,\phi \longrightarrow \mathbf{A}, \qquad \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \longrightarrow \phi. \tag{15.15}$$

§16. Tensor electromagnético

Derivemos ahora la ecuación de movimiento (15.7) apropiada para un espacio de cuatro dimensiones. Para esto es más conveniente variar directamente la acción (15.1)

$$\delta S = \delta\int_a^b \left\{-mc\,ds - \frac{e}{c}A_q dx^q\right\} = 0. \tag{16.1}$$

Utilizando el hecho de que $ds^2 = dx_k dx^k$ se obtiene de esta ecuación

$$\delta S = -\int_a^b \left\{mcu_k\,\delta dx^k + \frac{e}{c}A_q\,d\delta x^q + \frac{e}{c}\delta A_k\,dx^k\right\} = 0,$$

donde $u^m = dx^m/ds$ es la cuatro–velocidad. Integrando los dos primeros términos de esta ecuación por partes se obtiene

$$\int_a^b \left\{mc\frac{du_k}{ds}\,ds\,\delta dx^k + \frac{e}{c}\,dA_q\,d\delta x^q - \frac{e}{c}\,\delta A_k\,dx^k\right\} - \left\{\left(mcu_k + \frac{e}{c}A_k\right)\delta x^k\right\}_a^b = 0. \tag{16.2}$$

El segundo término del lado izquierdo de la ecuación (16.2) es cero pues la variación se lleva acabo con puntos extremos a y b fijos. Debido a que $\delta A_k = (\partial A_k/\partial x^m)\,\delta x^m$ y $dA_k = (\partial A_k/\partial x^m)\,dx^m$ entonces la ecuación (16.2) puede escribirse como

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$\int_a^b \left\{ mc\frac{du_m}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^m} - \frac{\partial A_m}{\partial x^k}\right) u^k \right\} ds\, \delta x^m = 0.$$

Debido a la arbitrariedad de δx^m en la variación, necesariamente se obtiene

$$mc\frac{du^k}{ds} = \frac{e}{c} F^{km} u_m, \tag{16.3}$$

en donde el *tensor electromagnético* o *tensor de Faraday* de rango dos antisimétrico F_{kl} está definido por

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \tag{16.4}$$

La ecuación de movimiento de una partícula que se mueve en un campo electromagnético está dada por la ecuación (16.3). Dicho de otro modo, la ecuación (16.3) es la ecuación de Lorentz en cuatro dimensiones. Sus componentes espaciales llevan exactamente a la igualdad (15.7). La componente temporal implica que la razón de cambio de la energía cinética $E_{cin} = \gamma mc^2$ (cf. ecuación (14.5)) con respecto al tiempo está dada por[†]

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{16.5}$$

Utilizando la definición del tensor electromagnético dada por la relación (16.4) es fácil verificar que

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -Bz & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -Bz & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{16.6}$$

Las cantidades

$$F_{ik}F^{ik} = \text{inv} \qquad \epsilon^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \text{inv}, \tag{16.7}$$

forman un escalar y un pseudoescalar respectivamente que son invariantes ante transforma-

[†]Esta relación puede calcularse directamente utilizando la ecuación de Lorentz (15.8).

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

ciones de Lorentz. Utilizando la definición del tensor electromagnético dada por la ecuación (16.4) y la definición del campo eléctrico y magnético, de las relaciones (15.8)-(15.9), las ecuaciones (16.7) implican que

$$B^2 - E^2 = \text{inv}, \qquad \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = \text{inv}. \tag{16.8}$$

respectivamente.

§17. Ecuaciones del campo electromagnético

Utilizando la definición del tensor de Faraday dada por la ecuación (16.4) es claro que[†]

$$\epsilon^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0. \tag{17.2}$$

Las cuatro ecuaciones que aparecen en la ecuación (17.2) forman el primer par de las ecuaciones de Maxwell

$$\mathbf{div}\mathbf{B} = 0, \tag{17.3}$$

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{17.4}$$

La ecuación (17.3) corresponde a la componente temporal de la relación (17.2). Las tres componentes de la ecuación (17.4) corresponden a las componentes espaciales de la igualdad (17.2). Las ecuaciones que describen el campo electromagnético no quedan determinadas por la ecuación (17.2) únicamente. Esto se debe a que las cuatro ecuaciones diferenciales de esta ecuación no son suficientes para encontrar las seis (digamos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$) componentes independientes del tensor $F_{\mu\nu}$.

Para encontrar las demás relaciones que relacionan al campo es necesario construir la acción total S del sistema. Esta acción contiene tres términos aditivos

[†]La ecuación (17.2) puede escribirse como

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0, \tag{17.1}$$

que es la manera en la cual se presenta usualmente.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$S = S_m + S_{mf} + S_f. \tag{17.5}$$

S_m corresponde a la acción de las partículas materiales libres. Para el caso de una única partícula libre esta acción está dada por la ecuación (14.1). En el caso de que se tengan varias partículas cargadas, entonces esta acción está dada por

$$S_m = -\sum mc \int ds, \tag{17.6}$$

donde la suma se lleva a cabo para cada una de las partículas materiales en el campo. La acción S_{mf} corresponde a la acción debida a la interacción entre las partículas materiales y el campo. En el caso de una sola partícula interaccionando con el campo electromagnético esta acción está dada por el segundo término del lado derecho de la ecuación (15.1). En el caso de una colección de partículas esta acción está dada por

$$S_{mf} = -\sum \frac{e}{c} \int A_k dx^k. \tag{17.7}$$

En esta última suma el cuatro–vector A_k está evaluado justamente en la posición donde se encuentra la partícula en cuestión en el espacio–tiempo.

Finalmente la acción S_f es la acción que depende únicamente de las propiedades del campo, sin importar las partículas que se encuentren en el mismo. En otras palabras, esta es la acción que corresponde al campo mismo en ausencia de cargas. Hasta ahora habíamos utilizado únicamente la acción (15.1), es decir, $S_m + S_{mf}$. Esto ya que anteriormente solamente estábamos interesados en encontrar ecuaciones que describieran el movimiento de partículas materiales cuando estas interaccionan con el campo.

La forma matemática de la acción S_f puede calcularse utilizando el resultado experimental de que los campos electromagnéticos satisfacen el *principio de superposición*: "el campo total producido por un conjunto de cargas es igual a la suma vectorial de cada uno de los campos producidos por cada partícula". Esto significa que si F_{kl} y F'_{kl} son dos soluciones de las ecuaciones del campo electromagnético, entonces la suma $F_{kl} + F'_{kl}$ también será una solución. Dicho de otra manera, las ecuaciones que describen al campo electromagnético deben ser ecuaciones diferenciales lineales. Así pues, el integrando de la acción S_f debe ser una función cuadrática (e invariante) en los campos. De esta manera, al

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

tomar la variación δS_f se tendrá que el orden de la cuadrática se reducirá para convertirse en una función lineal. Debido a que el potencial A_k no está determinado de manera única (cf. ecuación (15.15)), entonces este mismo no puede aparecer dentro de la integral de S_f. La única cantidad que debe aparecer es el escalar $F^{ik}F_{ik}$[†]. De esta manera se obtiene que

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F^{ik}F_{ik}d\Omega. \tag{17.9}$$

El signo menos de esta ecuación se debe al hecho de que $F^{ik}F_{ik} = 2\left(B^2 - E^2\right)$. El campo eléctrico $\mathbf{E}$ contiene la derivada $-\partial\boldsymbol{A}/\partial t$ (cf. ecuación (15.8)). Por lo tanto, uno de los términos del producto $F^{ik}F_{ik}$ será igual a $-\partial\boldsymbol{A}/\partial t$ lo cual no es posible puesto que si $\boldsymbol{A}$ tiene cambios suficientemente grandes en periodos de tiempo suficientemente pequeños entonces es siempre posible hacer a S_f una cantidad negativa grande. De esta manera S_f no alcanzaría un mínimo en el intervalo de tiempo que se está tomando en cuenta. El valor de $1/16\pi c$ en la ecuación (17.9) depende de las unidades que se utilicen. En este caso se está suponiendo el *sistema Gaussiano* de unidades (cgs) para el campo electromagnético. Existe también el sistema de *Heaviside* en donde la constante de proporcionalidad entre S_f y la integral del lado derecho de la ecuación (17.9) está dado por $-1/4$. Este sistema es muy útil pues factores de 4π no aparecen en las ecuaciones de campo (a costa de que un factor de π aparece en la ley de Coulomb electrostática).

De las ecuaciones (17.6), (17.7) y (17.9) se sigue que la acción total (17.5) está dada por

$$S = -\sum\int mcds - \sum\int \frac{e}{c}A_k dx^k - \frac{1}{16\pi c}\int F^{ik}F_{ik}d\Omega. \tag{17.10}$$

Para el caso de esta acción de ninguna manera se supone que las cargas son pequeñas

[†]Uno queda tentado en pensar si $\epsilon^{iklm}F_{ik}F_{lm}$ podría utilizarse como la cuadrática buscada. El problema es que esta cantidad es un pseudoescalar y por lo tanto no es una cantidad que deba aparecer bajo el signo integral de S_f. Otra manera de verlo es utilizando el hecho de que este pseudoescalar puede escribirse como

$$\epsilon^{iklm}F_{ik}F_{lm} = 4\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\epsilon^{iklm}A_k\frac{\partial A_m}{\partial x^l}\right). \tag{17.8}$$

Al sustituir esto en el integrando para S_f se obtiene (mediante el teorema de la divergencia) la integral de lo que está dentro del paréntesis en el lado de la derecha de la ecuación (17.8) tomada a lo largo de la frontera de todo el espacio–tiempo. Es decir, una integral sobre la hipersuperficie de tres dimensiones que es frontera de todo el espacio–tiempo. El valor de esta integral es evidentemente cero, pues los campos (en este caso electromagnéticos) se anulan en infinito.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

(i.e. no son cargas de prueba) como se hizo antes para encontrar las ecuaciones de movimiento. En otras palabras A_k y F_{kl} se refieren al campo electromagnético externo más el campo producido por las partículas que se encuentran interaccionando en el mismo. Por esta razón los campos A_k y F_{km} son funciones que dependen de la posición, el tiempo y las velocidades de las cargas.

En general, las cargas no son puntuales, sino que se encuentran distribuidas en volúmenes en el espacio. Por ejemplo, la carga total contenida en un volumen V es igual a la integral $\int \rho \mathrm{d}V$, en donde la *densidad de carga* ρ se define como la cantidad de carga infinitesimal por unidad de volumen y es una función que depende de las posiciones y del tiempo. Para el caso de una distribución de partículas puntuales, esta densidad es igual a

$$\rho = \sum_q e_q \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q\right), \tag{17.11}$$

en donde δ es la función Delta de Dirac en tres dimensiones y la suma se lleva a lo largo de todas las cargas q. La carga es un invariante de Lorentz y por lo tanto el producto $\rho \mathrm{d}V$ es un invariante de Lorentz (a pesar de que ρ no es un invariante). Debido a que $\mathrm{d}e\mathrm{d}x^i = \rho \mathrm{d}V \mathrm{d}t(\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t)$ es un cuatro–vector (pues el lado izquierdo de esta ecuación lo es), entonces como $\mathrm{d}V\mathrm{d}t$ es un escalar (cf. ecuación (13.23)), la cantidad

$$j^k = \rho \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}, \tag{17.12}$$

resulta ser un cuatro vector. Las cuatro cantidades j^k se denominan como el *cuatro–vector de corriente–carga*. Sus componentes espaciales forman un tres–vector denominado el *vector de densidad de corriente*

$$\mathbf{j} = \rho \boldsymbol{v}. \tag{17.13}$$

Utilizando el hecho de que la carga total e está dada por

$$e = \int \rho \mathrm{d}V, \tag{17.14}$$

la ecuación (17.10) puede escribirse como

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$S = -\sum \int mcds - \frac{1}{c^2}\int A_k j^k d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F^{ik}F_{ik}d\Omega. \tag{17.15}$$

Esta es la acción total buscada. Para encontrar las ecuaciones de campo, es decir, "las ecuaciones de movimiento para el campo F_{kl}", debemos variar la acción δS e igualarla a cero, de acuerdo con el principio de mínima acción. Esto se hace mediante la suposición de que *el movimiento de las cargas es conocido* y se varía solamente el potencial. Cuando queríamos encontrar las ecuaciones de movimiento de una partícula moviéndose en el campo, supusimos que el campo estaba dado y variamos únicamente la trayectoria de la partícula. En aquel caso particular se utilizó la variación $\delta S_m = 0$. Además, debido a que j^p está relacionado con las coordenadas como lo muestra la ecuación (17.12) entonces su variación es idénticamente igual a cero. De tal forma que la variación de la ecuación (17.16) está dada por

$$\delta S = 0 = -\int \frac{1}{c}\left\{\frac{1}{c}j^p\delta A_p + \frac{1}{8\pi}F^{pm}\delta F_{pm}\right\}d\Omega. \tag{17.16}$$

Tarea 4

(I) *Sustituye la ecuación* (16.4) *en la relación* (17.16) *y muestra que*

$$\delta S = 0 = -\int \frac{1}{c}\left\{\frac{1}{c}j^i\delta A_i - \frac{1}{4\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right\}d\Omega. \tag{17.17}$$

(II) *Utiliza el teorema de Stokes para el segundo miembro del lado derecho de la ecuación* (17.17) *y muestra que, como la intensidad del campo electromagnético se anula en infinito entonces*

$$\int \left\{\frac{1}{c}j^p + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{pk}}{\partial x^k}\right\}\delta A_p\, d\Omega = 0. \tag{17.18}$$

Debido a que las variaciones de δA_k se llevan acabo de forma arbitraria, entonces el integrando de la ecuación (17.18) es necesariamente igual a cero

$$\frac{\partial F^{mk}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^m. \tag{17.19}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Ésta es la relación buscada que junto con la ecuación (16.4) constituyen las ecuaciones del campo electromagnético (*Ecuaciones de Maxwell*). La componente temporal y las tres componentes espaciales de la ecuación (17.19) pueden escribirse respectivamente como

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{17.20}$$

$$\mathbf{curl}\, \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{17.21}$$

Estas dos últimas ecuaciones junto con las ecuaciones (17.3)-(17.4) constituyen las bien conocidas ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético.

§18. Efecto Doppler

Antes de terminar este capítulo, veamos una derivación rápida del efecto Doppler pues este mismo será utilizado a lo largo del curso en diversas ocasiones.

Consideremos un campo electromagnético en el vacío, para el cual la densidad de carga ρ tiene un valor nulo en todo el espacio–tiempo y por lo tanto $j_i = 0$ de acuerdo a la ecuación (17.12). Sustituyendo entonces la ecuación (16.4) en la (17.19) se obtiene que

$$\frac{\partial^2 A^m}{\partial x_p \partial x^p} - \frac{\partial^2 A^k}{\partial x_m \partial x^k} = 0. \tag{18.1}$$

Debido a la invariancia de norma (cf. ecuación (15.13)) del campo electromagnético, impongamos una condición auxiliar sobre el potencial A^k, la llamada *condición de Lorentz*

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0. \tag{18.2}$$

Los potenciales A^k que satisfacen la condición (18.2) se dicen que están en la *norma de Lorentz*. Sustituyendo la relación (18.2) en la (18.1) se obtiene la *ecuación de onda* para los potenciales electromagnéticos[†]:

[†]En ocasiones se define al operador D'Alambertiano $\Box$ (o incluso $\Box^2$ para asemejarse al Laplaciano ∇^2) como $\Box := \partial^2/\partial x_k \partial x^k$. Debido a que este operador es simplemente el operador de Laplace en un espacio de varias dimensiones hoy en día se utiliza mas formalmente la notación $\Delta := \partial/\partial x_k \partial x^k$ y a este operador se le denomina el *operador de Laplace–Beltrami*. En el lenguaje de la geometría diferencial a este mismo

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$\Delta A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^l \partial x_l} = 0. \tag{18.3}$$

La solución de *ondas monocromática*, i.e. ondas para las cuales el campo es una función periódica del tiempo, está dada por

$$A^k = \mathrm{Re}\left\{ A^k_0 e^{i(k^m x_m)} \right\}, \tag{18.4}$$

en donde A^k_0 es un cuatro–vector constante y el cuatro–vector de onda k^m está definido por

$$k^m := \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right). \tag{18.5}$$

El tres–vector $\mathbf{k} := w\mathbf{n}/c$ es el *vector de onda* y ω representa a la *frecuencia angular* de la onda electromagnética. El vector unitario $\mathbf{n}$ apunta en la dirección de propagación de la onda electromagnética. Con estas definiciones es claro que el cuatro–vector de onda electromagnético satisface las relaciones

$$k^m k_m = 0, \qquad k_m x^m = \omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}. \tag{18.6}$$

La segunda relación muestra que en efecto las cantidades k^m forman un cuatro–vector, pues la cantidad $\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ es un escalar ya que representa la *fase de la onda*.

Consideremos ahora una fuente que se mueve con velocidad v, la cual emite radiación electromagnética con frecuencia ω. Ésta radiación es observada en un sistema de referencia en reposo (el laboratorio) con frecuencia ω_{obs}. Para calcular las relaciones entre ambas frecuencias, basta con encontrar la forma en la que se transforma la componente temporal del cuatro–vector k^m de acuerdo a las transformaciones de Lorentz (13.3), para obtener

$$k^0_{obs} = \frac{k^0 - v k^1/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{18.7}$$

Sustituyendo la componente temporal k^0 de la ecuación (18.5) y el hecho de que $k^1 = k\cos\alpha = (\omega/c)\cos\alpha$, con α el ángulo (medido en el sistema del laboratorio) entre la

operador se le denomina el *operador de Laplace–de Rham*. Evidentemente, todos estos operadores son generalizaciones del operador de Laplace ∇^2.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

dirección de emisión de la onda y la dirección de movimiento de la fuente, se obtiene

$$\omega_{obs} = \omega \, \frac{1 - (v/c)\cos\alpha}{1 - v^2/c^2}. \tag{18.8}$$

Esta relación significa que si el objeto emisor se aleja del laboratorio entonces la frecuencia observada disminuye (el espectro electromagnético se observa movido hacia el rojo) y si el objeto que emite la radiación se acerca, la frecuencia observada aumenta (el espectro electromagnético se observa corrido hacia el azul). A este fenómeno se le conoce como el *efecto Doppler*.

En el límite de velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, i.e. $v \ll c$, la ecuación (18.8) converge a

$$\omega = \omega_0 \begin{cases} 1 + (v/c)\cos\alpha, & \text{cuando } \alpha \not\approx \pi/2. \\ 1 - v^2/2c^2, & \text{cuando } \alpha = \pi/2. \end{cases} \tag{18.9}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Capítulo IV

Hidrodinámica Relativista

Una de las ramas mas importantes de la astronomía es el estudio de la dinámica de los gases. Las estrellas, las galaxias, el medio interestelar, el medio intergaláctico y el universo en su totalidad son ejemplos de objetos que de una u otra manera poseen gases relacionados a los mismos. Es la radiación electromagnética producida por la temperatura y la dinámica de diversos fluidos en el universo la que llega a nuestros detectores terrestres. Por esta razón el estudio de la mecánica de fluidos o hidrodinámica es una de las herramientas mas útiles en la astrofísica.

§19. Tensor de energía–momento

Consideremos un sistema tal que su *acción* S esté dada por

$$S = \int \Lambda \left(q,\ \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) dV dt = \frac{1}{c} \int \Lambda d\Omega, \tag{19.1}$$

donde Λ es una función de las cantidades q que describen el estado del sistema y de sus derivadas con respecto a las coordenadas del cuatro–espacio $\partial q/\partial x^k$. Aquí estamos escribiendo sin pérdida de generalidad únicamente una sola cantidad q. Los resultados obtenidos más adelante son fácilmente generalizados para un sistema en el cual la función Λ depende explícitamente de las cantidades $q_{(1)},\ q_{(2)} \ldots$ y de sus derivadas con respecto a las coordenadas $\partial q_{(1)}/\partial x^i,\ \partial q_{(2)}/\partial x^i, \ldots$ La acción (19.1) puede escribirse como $S = \int L dt$, donde L es el *Lagrangiano* del sistema. Con esto y la ecuación (19.1) se obtiene que

$\int \Lambda dV = L$. En otras palabras, Λ es una *densidad Lagrangiana*. De la misma manera que se hace en mecánica, el hecho de que el sistema sea cerrado implica que Λ no depende explícitamente de las coordenadas x^k.

Las ecuaciones de campo son obtenidas mediante el *principio de mínima acción* mediante el cual la variación de la acción δS tiene que alcanzar un mínimo para trayectorias suficientemente pequeñas. La acción (19.1) alcanza un extremo cuando su variación $\delta S = 0$. De esta manera, variando la acción en la ecuación (19.1) y escribiendo $\partial q/\partial x^k = q_{,k}$ obtenemos

$$\delta S = \frac{1}{c}\int d\Omega \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q_{,i} \right\} = \frac{1}{c}\int d\Omega \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\delta q \frac{\partial \Lambda}{\partial q,i}\right] - \delta q \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right\} = 0. \tag{19.2}$$

La segunda integral del lado derecho se cancela mediante el uso del teorema de Stokes en todo el espacio. Del resto de la igualdad se sigue necesariamente que

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0. \tag{19.3}$$

Debido a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} &= \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i} \\ &= q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}, \end{aligned} \tag{19.4}$$

entonces, si definimos el tensor T^{ik} mediante la relación

$$T_i{}^k := \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} q_{,i} - \Lambda \delta_i^k. \tag{19.5}$$

se sigue que[†]

[†]Es un poco laborioso mostrar que el tensor T^{ik} es simétrico, i.e. $T^{ik} = T^{ki}$. La demostración tradicional se basa en que el tensor T^{ik} no está definido de manera única, pues si a este tensor se le suma el tensor $\partial \Omega^{ikl}/\partial x^l$, donde $\Omega^{ikl} = -\Omega^{ilk}$, entonces la ecuación de movimiento (19.6) también se satisface. Resulta que la condición natural para que el tensor T^{ik} quede determinado de manera única es cuando este tensor es simétrico.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{19.6}$$

La ecuación (19.6) es el equivalente a una ecuación de movimiento. En el caso de estar describiendo un campo, esta misma nos da las ecuaciones que describen al campo como función de las coordenadas x^i.

Integremos ahora la ecuación (19.6) sobre el volumen Ω del cuatro–espacio que es encapsulado por la hipersuperficie S

$$\int \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} d\Omega = \oint T_i^k dS_k = 0. \tag{19.7}$$

Escojamos la hipersuperficie S de tal manera que contenga todas las tres dimensiones espaciales tal como se muestra en la Figura IV.1. En otras palabras, la hipersuperficie S es tal que se encuentra rodeada por los planos $x^0 = \text{const}_{(A)}$ y $x^0 = \text{const}_{(B)}$. De esta manera, la integral del lado derecho de la ecuación (19.7) se reduce a

$$\left\{ \int_{x^{(A)0}} + \int_{x^{(B)0}} \right\} T_i^k dS_k = 0.$$

Ahora bien, como $dS_k^{(A)} = -dS_k^{(B)} := dS_k$, entonces el vector

$$p_i := \zeta \int T_i^k dS_k = \text{const}, \tag{19.8}$$

sobre cualquier hipersuperficie $x^0 =$ const . En otras palabras, el vector p^i es una cantidad conservada.

Naturalmente, en un sistema cerrado el cuatro–vector que se conserva es el cuatro–momento. De esta manera, p^i lo identificamos con el cuatro–momento. Ahora bien, como $p^0 = \zeta \int T^{0k} dS_k = \zeta \int T^{00} dV$ y ya que $T^{00} = T_{00} = \dot{q}\partial\Lambda/\partial\dot{q} - \Lambda$ con $\dot{q} := \partial q/\partial t$, podemos identificar a T^{00} con la energía del sistema, ya que cuando esta última es conservada, sabemos que el Hamiltoniano H es igual a la energía E del sistema y es tal que $H = E = p\dot{q} - L = \dot{q}\partial L/\partial\dot{q} - L$. Esta última relación es semejante al valor de T^{00}. De esta manera $E \propto \int T^{00} dV$. Debido a esta relación y como la componente temporal del cuatro–momento

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

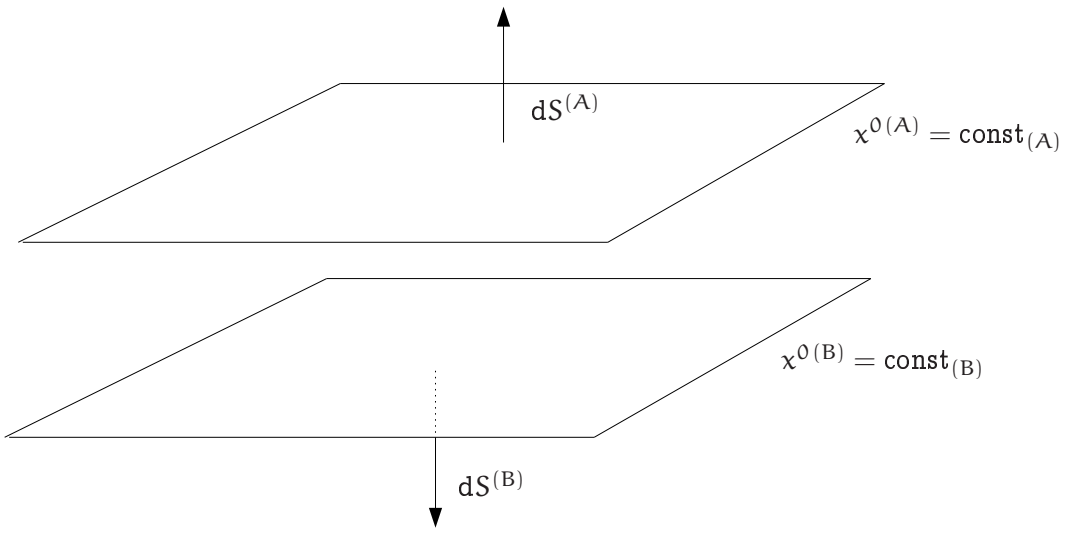

Figura IV.1: Integración del tensor de energía–momento en un volumen de cuatro dimensiones encapsulado entre las hipersuperficies $x^{0\,(A)}$ y $x^{0\,(B)}$. Usando el teorema de Gauss la integral puede ser extendida a lo largo de las hipersuperficies mostradas en la figura. La integral de los extremos que se localizan en infinito tiene valor nulo.

es E/c, es evidente que la constante de proporcionalidad $\zeta = 1/c$. De esta manera

$$p^i = \frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k. \tag{19.9}$$

Cuando la tres–hipersuperficie sobre la cual se realiza la integración en la ecuación (19.9) corresponde a $x^0 = \text{const}$, entonces esta misma relación implica que $p^i = \int T^{i0} dV/c$. De esta manera, p^0 representa la energía del sistema dividida por la velocidad de la luz c y P_α es el tres–vector de momento. Con esto se ve que T^{00} es la densidad de energía (energía por unidad de volumen) y $T^{0\alpha}/c$ es la densidad de momento (momento por unidad de volumen). Para entender el significado físico de las demás componentes, separemos la ecuación (19.6) en sus componentes temporal y espacial respectivamente

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0, \tag{19.10}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{19.11}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Si ahora integramos la ecuación (19.10) sobre un tres–volumen V de tres dimensiones y utilizamos el teorema de Gauss, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}dV = -c\oint T^{0\alpha}da_{\alpha},$$

en donde el elemento de área da_β es normal a la dos–hipersuperficie que encapsula al tres–volumen V El lado izquierdo de esta igualdad representa el cambio en el tiempo de la energía del sistema. Por lo tanto, el lado derecho debe ser la energía que fluye a través de la frontera del volumen V por unidad de tiempo. Así pues, la cantidad $S_\alpha := cT^{0\alpha}$ es un vector que representa la densidad de flujo de energía, es decir, la cantidad de energía que fluye por unidad de área por unidad de tiempo.

De la misma manera, integrando la ecuación (19.11) en un tres–volumen y utilizando el teorema de la divergencia se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{T^{0\alpha}}{c}dV = -\oint T^{\alpha\beta}da_{\beta}.$$

El lado izquierdo de esta igualdad representa la razón de cambio del momento por unidad de tiempo. De esta manera, el lado derecho corresponde al momento por unidad de tiempo que fluye a través de la superficie que contiene al volumen V. Así pues el tensor tres–dimensional $T^{\alpha\beta} = -\sigma_{\alpha\beta}$ representa la tensor de flujo de momento, con $\sigma_{\alpha\beta}$ el *tensor de esfuerzos*.

§20. Cuerpo macroscópico

Tomando en cuenta futuras aplicaciones, calculemos el valor del tensor de energía–momento para un cuerpo macroscópico (gas o fluido) como una nube de gas en el medio interestelar, una estrella, un agujero negro o el universo en su totalidad.

Para el caso de cuerpos macroscópicos, el flujo de momento por unidad de área es igual a la fuerza, es decir, $T^{\alpha\beta}da_\beta$ es la fuerza que actúa sobre el elemento de área da_β. Para simplificar los cálculos, escojamos el elemento de fluido en cuestión en reposo. En otras palabras, analicemos el comportamiento de este pequeño elemento en su *sistema propio de referencia*. En este sistema el *principio de Pascal* es válido: "*la presión que se ejerce sobre una porción del fluido es la misma en todas direcciones y es perpendicular a la*

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

superficie sobre la que actúa". De esta manera, $T^{\alpha\beta}da_\beta = Pda_\alpha = \delta_{\alpha\beta}Pda_\beta$. La cantidad T^{00} representa la densidad de energía interna e propia del fluido. Como el elemento de fluido se encuentra en reposo en su sistema propio, entonces $T^{0\alpha} = 0$. Así pues, en el sistema propio de referencia el tensor $T^{ik} = \mathrm{diag}[e,\ p,\ p,\ p]$. Utilizando la cuatro–velocidad u^i esta relación puede escribirse como

$$T^{ik} = \omega u^i u^k - p g^{ik}, \tag{20.1}$$

donde $\omega = e + p$ es la *entalpía* por unidad de volumen. En la ecuación (20.1) aparece únicamente una relación entre vectores, tensores y escalares. En otras palabras, esta relación debe ser válida en cualquier sistema de referencia.

Cuando hablamos de hidrodinámica relativista, las cantidades como la entalpía por unidad de volumen e, la presión p, la entropía por unidad de volumen σ y el volumen V son referidos con respecto al sistema propio de referencia. Esto es contrario a lo que se hace en hidrodinámica no–relativista, en donde estas cantidades son medidas con respecto al sistema de referencia del Laboratorio.

§21. Ecuaciones de la hidrodinámica

Consideremos un volumen de tres dimensiones V_0 que se encuentra en reposo en el sistema de referencia inercial del laboratorio (i.e. el sistema de referencia desde donde analizaremos a un fluido que se mueve). El número de partículas de fluido que se encuentran encapsuladas dentro de este volumen está dado por la integral $\int \gamma n \mathrm{d}V$ tomada a lo largo de todo el volumen V_0. Aquí $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ es el factor de Lorentz para cada partícula de fluido que se encuentra dentro del volumen V_0 y que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$. La razón por la que en el integrando aparece la cantidad γn (y no n solamente) es porque el volumen $(1/n)$ sufre una contracción de Lorentz al ser visto desde el sistema de referencia del laboratorio. De acuerdo a la Figura (IV.2), el número de partículas por unidad de tiempo que fluye a través del elemento de área $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ está dado por $\gamma n \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$. Debido a que el elemento de área apunta hacia afuera de la superficie, entonces la cantidad $\gamma n \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$ es positiva si el fluido fluye hacia afuera de la superficie y negativa en caso contrario.

De esta manera, el número de partículas total que fluye hacia afuera a través del

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

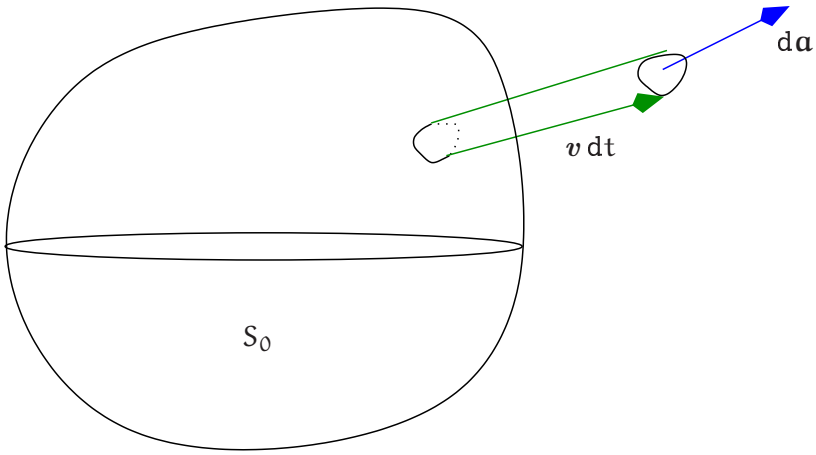

Figura IV.2: La figura muestra el flujo de partículas de un fluido a través de una pequeña dos–superficie $d\boldsymbol{a}$ que es parte de la frontera S_0 que encapsula al tres volumen V_0 . El flujo de partículas (cantidad de partículas que fluyen a través de un área por unidad de tiempo) que pasa por el pequeño cilindro de altura $\boldsymbol{v}dt$ y base $d\boldsymbol{a}$ está dado por $\gamma n\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}$.

volumen V_0 por unidad de tiempo está dado por la integral

$$\oint \gamma n\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a} \tag{21.1}$$

tomada sobre la superficie cerrada S_0 que es frontera de V_0. Por otra parte, el decremento del número de partículas del volumen V_0 por unidad de tiempo está dado por

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \gamma n d\, V. \tag{21.2}$$

Igualando la ecuación (21.1) con la relación (21.2) se obtiene que

$$\int \frac{\partial\,(n\gamma)}{\partial t} dV = -\oint n\gamma\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a} = -\int \operatorname{div}\,(\gamma n\boldsymbol{v})\, d\, V.$$

Debido a que el volumen V_0 es arbitrario y teniendo en cuenta que la cuatro velocidad está dada por la ecuación (13.30) se sigue que

$$\frac{\partial n^k}{\partial x^k} = 0, \tag{21.3}$$

donde $n^k := nu^k$ es el cuatro–vector de flujo de partículas. La ecuación (21.3) es la *ecua-*

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

ción de continuidad en hidrodinámica y expresa la conservación de masa. Las restantes ecuaciones de la hidrodinámica están contenidas en la relación (19.6) mediante la sustitución de la ecuación (20.1).

Hagamos la proyección de la ecuación (19.6) en la dirección de u^i, es decir, tomemos la contracción $u_i \partial T^{ik}/\partial x^k$. Debido a que

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = u_i \frac{\partial \left(\omega u^k\right)}{\partial x^k} + w u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0,$$

y como $u^i u_i = 1$ obtenemos para la contracción

$$\frac{\partial(\omega u^k)}{\partial x^k} - u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} = 0.$$

Utilizando la igualdad $\omega u^k = n u^k (\omega/n)$ y la ecuación de continuidad (21.3) en la relación anterior se obtiene que

$$n u^k \left\{ \frac{\partial}{\partial x^k} (\omega/n) - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x^k} \right\} = 0 \tag{21.4}$$

La primera ley de la termodinámica en su forma no–relativista puede escribirse como

$$d\epsilon = T ds - p dV \tag{21.5}$$

o bien,

$$dw = T ds + V dp \tag{21.6}$$

donde $w = \epsilon + pV$ es la entalpía especifica (entalpía por unidad de masa) medida en el sistema de referencia del laboratorio, ϵ es la energía interna especifica, s la entropía especifica y V el volumen especifico. La ecuación (21.6) puede generalizarse de manera relativista como

$$d(\omega/n) = T d(\sigma/n) + (1/n)\, dp, \tag{21.7}$$

siendo σ la entropía por unidad de volumen en el sistema propio de referencia del fluido.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Así pues, con ayuda de la ecuación (21.7), la ecuación (21.4) puede escribirse como

$$u^k \frac{\partial (\sigma/n)}{\partial x^k} = \frac{d (\sigma/n)}{ds} = 0. \tag{21.8}$$

En otras palabras, ya que $\sigma/n =$ const a lo largo de la trayectoria del fluido, se dice que este mismo se mueve de manera *adiabática*[†]. A esta clase de fluidos se les denomina también ideales puesto que no existen pérdidas (o ganancias) de energía mediante viscosidad, conductividad térmica y/o radiación.

Por otra parte, un tensor ortogonal a u^i es $\delta^l_i - u_i u^l$ ya que la contracción de estos dos es nula. Proyectemos la ecuación (19.6) en la dirección de este tensor para obtener así

$$\omega u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^l \frac{\partial p}{\partial x^l}. \tag{21.9}$$

Ésta es la famosa *Ecuación de Euler* en su forma cuatro–dimensional.

Tarea 5

(I) *Muestra que la componente temporal de la ecuación de Euler* (21.9) *se sigue de las componentes espaciales. En otras palabras, la componente temporal está demás siempre y cuando se tengan las otras componentes.*

(II) *Demuestra que las componentes espaciales de esta ecuación pueden escribirse como*

$$\frac{\gamma^2 \omega}{c^2} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad}\, \boldsymbol{v} \right\} = -\mathbf{grad}\, p - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{21.10}$$

Ésta es la ecuación de Euler *en su forma relativista.*

(III) *La componente temporal de la ecuación de Euler en su forma cuatro–dimensional para flujo estacionario (flujo para el cual $\partial/\partial t = 0$) es $\omega u^\alpha \partial u_0/\partial x^\alpha = -u_0 u^\alpha \partial p/\partial x^\alpha$. Si el flujo es también adiabático entonces con ayuda de la primera ley de la termodinámica*

[†]Cuando σ/n es constante en todo el fluido, decimos que el flujo es *isentrópico*.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

muestra que la derivada en la dirección de la velocidad se anula

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{grad}\,(\gamma\omega/n)=0.$$

En otras palabras, la cantidad

$$\frac{\gamma\omega}{n}=\ const\ , \tag{21.11}$$

a lo largo de una linea de corriente[†]*. La ecuación* (21.11) *es la* ecuación de Bernoulli *en su forma relativista. La constante que aparece en el lado derecho de esta relación varia para distintas lineas de corriente.*

(IV) *Muestra que cuando el flujo es adiabático, la ecuación de Euler puede escribirse como*

$$u^k\frac{\partial}{\partial x^k}\,(\omega u_i/n)=\frac{\partial}{\partial x^i}\,(\omega/n)\,. \tag{21.12}$$

Si el flujo es además estacionario, muestra que la ecuación (21.12) *puede escribirse como*

$$\gamma(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{grad})(\gamma\omega\boldsymbol{v}/n)+c^2\boldsymbol{grad}(\omega/n)=0.$$

Demuestra también que la multiplicación escalar de esta ecuación con $\boldsymbol{v}$ *implica que a lo largo de cualquier linea de corriente la cantidad en la ecuación* (21.11) *es constante. En otras palabras, con esta multiplicación demuestra la ecuación de Bernoulli.*

§22. Hidrodinámica no–relativista

Para derivar las ecuaciones no–relativistas de la hidrodinámica notemos primero la diferencia entre los valores de las cantidades termodinámicas en el caso relativista y el caso no–relativista. Para comenzar, las cantidades en el caso relativista son definidas con respecto al sistema propio de referencia del fluido. En mecánica no–relativista estas cantidades son referidas al sistema de referencia del laboratorio, i.e. a un sistema de refencia inercial en donde se observa el movimiento del fluido. En el caso relativista las cantidades termodinámicas como la densidad de energía interna e, la densidad de entropía σ, y la

[†]Matemáticamente las lineas de corriente se definen como las curvas $(x,\ y,\ z)$ para las cuales $dx/v_x = dy/v_y = dz/v_z = dt$. Solamente cuando el flujo es estacionario, i.e. cuando $\partial/\partial t = 0$, entonces las líneas de corriente representan las trayectorias recorridas por cada partícula de fluido.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

densidad de entalpía ω son todas definidas con respecto al volumen propio del fluido. En mecánica no–relativista, estas cantidades están definidas en unidades de la masa del elemento de fluido al que se refieren. Por ejemplo, la energía interna especifica ϵ, la entropía especifica s y la entalpía especifica w son todas medidas por unidad de masa en el sistema de referencia del laboratorio. Adicionalmente, cuando tomamos el límite no–relativista, cuando la velocidad de la luz tiende a infinito, debemos recordar que la densidad de energía interna e incluye a la densidad de energía en reposo nmc^2, donde m es la masa en reposo de la partícula de fluido en consideración. En el mismo límite, el volumen debe sufrir una contracción debido a la contracción de Lorentz que se efectúa al efectuar la transformación del sistema propio de referencia propio del fluido al sistema de referencia del laboratorio. Así pues, los siguientes límites deben tomarse al pasar de mecánica de fluidos relativista a no–relativista

$$\begin{aligned} mn &\xrightarrow[c\to\infty]{} \rho\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2} \approx \rho\left(1 + v^2/2c^2\right), \\ e &\xrightarrow[c\to\infty]{} nmc^2 + \rho\epsilon \approx \rho c^2 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon, \\ \frac{\omega}{n} &\xrightarrow[c\to\infty]{} mc^2 + m\left(\epsilon + \frac{p}{\rho}\right) \approx m\left(c^2 + w\right), \end{aligned} \tag{22.1}$$

donde ρ es la densidad de masa del fluido medida en el laboratorio del sistema.

Tarea 6

(1) *Utilizando los límites no–relativistas, muestra que la ecuación de continuidad, la ecuación de Euler en su forma tres–dimensional y la ecuación de la conservación de la entropía pueden escribirse como*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{22.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad})\,\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\, p, \tag{22.3}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad})\, s = 0. \tag{22.4}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

(II) *De la misma forma, muestra que la ecuación de Bernoulli puede escribirse en su versión no–relativista como*

$$\frac{1}{2}v^2 + w = \text{const.} \tag{22.5}$$

¿Qué relación tiene la constante del lado derecho de esta ecuación con la constante que aparece en la ecuación de Bernoulli?

§23. Cosmología Newtoniana

La aplicación más sencilla que existe utilizando hidrodinámica no–relativista en Astrofísica es hacia el universo mismo. Todo consiste en imaginar al universo como constituido por partículas de fluido que representan las galaxias: "el fluido universal". Distintas observaciones muestran que el universo a larga escala es homogéneo e isotrópico (cf. sección §4).

Consideremos un origen de coordenadas O amarrado a nuestra galaxia. Otra galaxia con origen de coordenadas O' se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}(\mathbf{r})$ con respecto a nuestra galaxia y $\mathbf{r}$ es el radio–vector medido con respecto a O. La galaxia en O' se localiza en $\mathbf{r} = \mathbf{a}$. De esta manera, la galaxia con origen O' se mueve con el fluido universal con respecto a O. Si un observador en O' ve una galaxia en la posición $\mathbf{r}'$ y mide la velocidad de esta misma como $\boldsymbol{v}'(\mathbf{r}') = \boldsymbol{v}'(\mathbf{r} - \mathbf{a})$, entonces de acuerdo a la ley de adiciones de velocidades de Galileo

$$\boldsymbol{v}'(\mathbf{r}') = \boldsymbol{v}'(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \boldsymbol{v}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{v}(\mathbf{a}). \tag{23.1}$$

Debido a la homogeneidad e isotropía del universo, la densidad de masa ρ y la presión p son tales que

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{r}') &= \rho'(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \rho(\mathbf{r}), \\ p'(\mathbf{r}') &= p'(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = p(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{23.2}$$

Sin embargo, el *principio cosmológico* dice que "*no vivimos en un lugar privilegiado*". En otras palabras, las ecuaciones (23.1)-(23.2) son válidas para cualquier origen O que se

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

tome en el universo. De esta manera, la ecuación (23.1) significa que la velocidad debe ser necesariamente una función lineal del radiovector $\boldsymbol{v}(\mathbf{r}) = \xi(t)\mathbf{r} + \text{const}$. Debido a que $\boldsymbol{v}(\mathbf{r} = 0) = 0$, la constante en esta ecuación debe ser cero. Al hecho de que la velocidad sea proporcional a la distancia se le denomina *ley de Hubble*. Por comodidad, introduzcamos un sistema de coordenadas amarrado a las galaxias. Estas *coordenadas de comovimiento* están definidas por

$$\mathbf{r} = R(t)\mathbf{r}_0, \tag{23.3}$$

donde $R(t)$ es el *factor de expansión* que está normalizado a una determinada época de tal forma que $R(t_0) = 1$ con $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$. Así, la ley de Hubble (23.1) es tal que

$$\boldsymbol{v} = \frac{\dot{R}}{R}\mathbf{r} = f(t)\mathbf{r} \qquad (\dot{[\,]} := (d[\,]/dt)\,). \tag{23.4}$$

Dado a que no hay creación espontánea de materia en el universo, entonces la ecuación de continuidad (22.2) es válida. Esta ecuación con ayuda de la ley de Hubble y el hecho de que la densidad $\rho(t)$ sólo es función del tiempo t se sigue que $\dot{\rho}/\rho = -3\dot{R}/R$ y por lo tanto

$$\rho R^{-3} = \rho(t_0). \tag{23.5}$$

Por otra parte la ecuación de Euler (22.3), cuando la gravedad propia del gas se toma en cuenta, puede escribirse como

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad})\,\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,p - \mathbf{grad}\phi, \tag{23.6}$$

donde $\mathbf{g} = -\mathbf{grad}\phi$ es la aceleración gravitacional y ϕ el potencial gravitacional. Sustituyendo la ley de Hubble (23.4) en la ecuación de Euler (23.6) se obtiene

$$3(\dot{f} + f^2) = -\Delta\phi = -4\pi G\rho, \tag{23.7}$$

donde G es la constante de gravitación universal y la igualdad del lado derecho de la ecuación se obtiene gracias a la *ecuación de Poisson* ($\Delta\phi := \nabla^2\phi = 4\pi G\rho$) para el campo gravitacional. De aquí se sigue que el campo gravitacional del universo está dado por

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$\mathbf{g} = -\frac{4}{3}\pi G\rho\mathbf{r}. \tag{23.8}$$

Sustituyendo el valor de f en la ecuación (23.7) y utilizando la relación (23.5) se obtiene la "*ecuación de movimiento del universo*"

$$\ddot{R}R^2 = -\frac{4}{3}\pi G\rho(t_0) = -C \tag{23.9}$$

donde C es una constante positiva. Debido a que $d/dt = \dot{R}d/dR$, la ecuación (23.9) puede integrarse para obtener

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 + \frac{C}{R} = -\frac{1}{2}\kappa. \tag{23.10}$$

El primer término del lado izquierdo en esta ecuación es la energía cinética del universo en expansión. El segundo término es la energía producida por las fuerzas de presión y el término de la derecha es entonces la energía total del sistema. En el capítulo de cosmología veremos que la constante κ representa la *curvatura del universo*. La forma de calcularla es utilizando una teoría relativista de la gravitación. Para analizar la dinámica del universo en expansión analicemos los siguientes casos

- *Curvatura negativa.* ➜ Hagamos el cambio $\kappa \to -\kappa > 0$. De esta manera la energía total del universo es positiva y en el límite cuando $R \to \infty$, es decir cuando $t \to \infty$, se obtiene de la ecuación (23.10) $R = \sqrt{k}t$, es decir, el universo está *abierto* y se expande por siempre.
- *Cero curvatura.* ➜ La solución de la ecuación (23.10) con $\kappa = 0$ es $R = (9C/2)^{1/3}t^{2/3}$ cuando $t \to \infty$
- *Curvatura positiva.* ➜ Para este caso la energía total del universo es negativa y $R \to 0$ cuando $t \to t_\star$ para un cierto tiempo finito $t_\star$ (ver tarea 7). En otras palabras, el universo se recolapsa después de un determinado tiempo $t_\star$.

Tarea 7

(1) Resuelve la ecuación de movimiento del universo (23.9) *por completo para los casos*

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

en los que (a) la curvatura es negativa, (b) la curvatura es cero y (c) la curvatura es positiva. Muestra que en el último caso el universo se recolapsa después de un tiempo finito pasada la "gran explosión". ¿Cuál es el valor de este tiempo?

(II) *Dibuja un diagrama de* R *vs.* t *en donde esquemáticamente muestres que sucede para cada uno de los casos del inciso anterior.*

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Capítulo V

Estrellas

Una estrella es una masa gaseosa suficientemente grande la cual se mantiene estable gracias a poseer un equilibrio entre las fuerzas de presión producidas por su propio gas con las fuerzas gravitacionales que el mismo genera e intentan colapsarla. La temperatura en el centro de estos objetos se eleva tanto que se logran formar reacciones termonucleares en su interior. En este capítulo analizaremos las propiedades básicas de las estrellas, su nacimiento, su evolución y su muerte.

§24. Criterio de Jeans

Cada objeto que observamos en el universo existe gracias a que hay un equilibrio entre ciertas fuerzas de la naturaleza que lo mantiene estable. De entre este océano inmenso de estructuras, existen unas las cuales resultan relativamente simples de analizar: las *nubes*. En astrofísica se define a una nube como un objeto gaseoso (típicamente de unos cuantos parsecs de longitud característica para nubes sumergidas en el medio interestelar) el cual se encuentra en equilibrio de presiones con su medio ambiente, es decir, $p_{\text{nube}} = p_{\text{medio}}$. En términos generales, dadas las dimensiones de estas nubes y a pesar de su baja densidad (la cual llega alcanzar en ocasiones valores extremos de hasta $10^{-3}\,\text{cm}^{-3}$), la gravedad propia de las mismas debe tomarse en consideración. La gravedad producida por cada una de las partículas de gas inducen a la nube a colapsarse gravitacionalmente. No obstante, las fuerzas de *presión térmica* (i.e. presión generada por la energía cinética de las moléculas de un gas –por ejemplo, la presión atmosférica es un ejemplo de presión térmica) actúan en sentido

inverso a las fuerzas de gravedad. De esta manera podemos definir más precisamente a una nube en astrofísica como una masa de gas en la cual las fuerzas de presión y las fuerzas gravitacionales son tales que la nube se encuentra en equilibrio mecánico.

Se dice que una nube (o cualquier otro objeto gaseoso con gravedad considerable como la atmósfera terrestre) se encuentra en *equilibrio hidrostático* cuando el lado izquierdo de la ecuación de Euler (23.6) (en el caso en que se consideran fuerzas de presión térmica y fuerzas gravitacionales solamente) es idénticamente igual a cero. Esto no significa que necesariamente las partículas de fluido se encuentran en reposo. La única restricción que se obtiene es que $d\boldsymbol{v}/dt = 0$. Con esto, la ecuación (23.6) implica que

$$\mathrm{grad}p = -\rho \mathrm{grad}\phi, \tag{24.1}$$

en otras palabras, las fuerzas de presión térmica (lado izquierdo de la ecuación (24.1)) balancean a las fuerzas de gravedad (lado derecho de la ecuación (24.1)).

Analicemos ahora bajo que condiciones este balance entre fuerzas de gravitación y fuerzas de presión térmica es válido. Para esto, utilicemos el hecho de que, dada la simetría esférica de la fuerza de gravitación, la nube debe poseer simetría esférica y por lo tanto la ecuación (24.1) puede escribirse como

$$\frac{dp}{dr} = G\frac{\rho m(r)}{r^2}, \tag{24.2}$$

en donde r es la distancia radial y la masa $m(r)$ evaluada en la posición r está dada por

$$m(r) = \int \rho(r) dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, \rho(r)\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_{\text{⊖}} d\Omega \int_0^r \rho(r)\, r^2 dr = 4\pi \int_0^r \rho(r)\, r^2 dr, \tag{24.3}$$

con Ω el ángulo sólido. Los ángulos polar y azimutal están dados por θ y φ respectivamente.

Para encontrar un criterio lineal que describa el equilibrio que se muestra en la ecuación (24.2), aproximemos esta ecuación a orden de magnitud. Lo mismo se obtiene si se hace una perturbación a primer orden de las ecuaciones de la hidrodinámica con las mismas suposiciones. Para esto, consideremos una longitud característica l, digamos el radio de la nube. De esta manera, $dp/dr \approx p/l$ y $GM/r^2 \approx GM/l^2$, donde $M \approx \rho l^3$ representa

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

la masa total de la nube. Con esto y utilizando el hecho de que $p \approx \rho c^2$, con c la velocidad del sonido, la ecuación (24.2) toma la forma

$$l \approx \frac{c}{\sqrt{G\rho}} := l_J. \tag{24.4}$$

Dicho de otra forma, una nube de gas sobre la cual únicamente actúan fuerzas de presión y de gravedad, se encuentra en equilibrio cuando su dimensión es del orden de la *longitud de Jeans* $l_J := c/\sqrt{G\rho}$. Este criterio de estabilidad se denomina el *criterio de estabilidad de Jeans* y es uno de los conceptos más importantes en toda la astrofísica. Tan importante que vale la pena repetir el cálculo de otra manera. Para esto, consideremos nuevamente una nube de longitud característica l. El *tiempo de colapso* t_{col}, i.e. el tiempo que tardaría la nube en "caer" sobre si misma cuando únicamente la gravedad actúa, está dado aproximadamente por el tiempo que tardaría esta misma en caer libremente desde su superficie. El tiempo de caída libre está dado por el radio de la nube divido por la velocidad de caída libre evaluada a este radio

$$t_{col} \approx \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}. \tag{24.5}$$

Por otra parte, el tiempo t_{sc} que una onda de sonido tarda en cruzar la estructura de la nube está dado por el radio de la nube l dividido por la velocidad de sonido c. Este tiempo mide el lapso máximo para que la nube en su totalidad se entere que una perturbación hecha en alguna cantidad hidrodinámica (excepto la entropía y la vorticidad) se llevó acabo en algún lugar de la nube. En otras palabras, el tiempo de cruce del sonido es el tiempo en el cual la presión es capaz de estabilizar a la nube ante cualquier cambio que se requiera. De esta manera, una nube en equilibrio debe satisfacer el hecho de que $t_{col} = t_{sc}$. De aquí se sigue inmediatamente que la longitud l será igual a la longitud de Jeans l_J.

Cuando las fuerzas de gravedad son mayores que las fuerzas de presión la nube sufre un *colapso gravitacional*. Este colapso sucede cuando la ecuación (24.2) toma la forma

$$\frac{dp}{dr} \lesssim G\frac{\rho m(r)}{r^2}, \tag{24.6}$$

y por lo tanto la longitud de la nube l es tal que

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$l \gtrsim l_J = \frac{c}{\sqrt{G\rho}}. \tag{24.7}$$

Inversamente, si los gradientes de presión son más grandes que las fuerzas gravitacionales entonces la nube tiende a expandirse. La condición matemática que expresa esto es $l \lesssim l_J$.

Cuando $l \gtrsim l_J$ se obtiene un colapso gravitacional puesto que los gradientes de presión no son suficientes para sostener la intensidad de la fuerza gravitacional. Este es uno de los criterios más importantes en la astrofísica y se denomina el *criterio de inestabilidad de Jeans*. Se define la *masa de Jeans* $M_J = \rho l_J^3$. De esta manera se dice que una nube de gas es gravitacionalmente inestable si su masa M es mayor a la masa de Jeans M_J.

En el caso de una nube molecular en el medio interestelar, el colapso gravitacional inducido por el criterio de inestabilidad de Jeans induce la formación de estrellas. Esto sucede porque cuando la nube se colapsa entonces su temperatura aumenta tanto hasta que se logran mantener estables procesos de fusión nuclear, y por lo tanto las fuerzas de presión extra que aparecen debido a la liberación de energía nuclear (no lo olvides: presión es energía por unidad de volumen –o lo que es lo mismo, densidad de energía) son capaces de detener el colapso y mantener a la estrella en equilibrio hidrostático. A groso modo, una estrella es un objeto gravitacional compacto (desde una fracción de masa solar hasta no más de unas cuantas decenas) que se mantiene estable gracias a balance de fuerzas de presión con fuerzas de gravedad y que posee reacciones termonucleares en su interior. Los detalles que siguen después del colapso gravitacional de una nube hasta formar una estrella (o varias –las estrellas casi siempre se observan en parejas, por lo tanto se cree que un colapso gravitacional de una nube molecular induzca la formación de más de una estrella) no se saben con certeza. Para esto se requiere de computo excesivo que a la fecha ninguna computadora ha sido capaz de realizar de manera satisfactoria. Sin embargo, se espera que cuando se logre producir la inestabilidad de Jeans se produzca por lo menos una estrella.

§25. Energía de amarre gravitacional

A manera de introducción comencemos por calcular la energía que se requiere para ensamblar gravitacionalmente a una distribución de partículas (masas) arbitrarias. Pri-

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

meramente calculemos el trabajo efectuado para llevar a una partícula de masa m desde infinito hasta una posición $\mathbf{r}$ fija a través de cualquier trayectoria. Si el potencial gravitacional está dado por ϕ entonces este trabajo está dado por $m\int_\infty^{\mathbf{r}} \mathbf{g}\cdot d\mathbf{l}$, en donde $\mathbf{g} := -\nabla\phi$ representa la aceleración gravitacional y $d\mathbf{l}$ es el elemento de longitud sobre la trayectoria. Se define la *energía de amarre gravitacional* de una partícula como el trabajo hecho en contra de las fuerzas gravitacionales para ensamblar a esta partícula en un campo gravitacional ϕ. En otras palabras, la energía de amarre gravitacional W de una partícula de masa m está dada por[†]

$$W = -m\int_\infty^{\mathbf{r}} \mathbf{g}\cdot d\mathbf{l} = +m\int_\infty^{\mathbf{r}} \nabla\phi\cdot d\mathbf{l} = m\Big(\phi(\mathbf{r}-\phi(\infty))\Big) = m\phi(\mathbf{r}) = -Gm\int \frac{\rho' dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{25.1}$$

y coincide con la energía potencial gravitacional de una partícula de masa m.

Supongamos ahora que tenemos una distribución de partículas en infinito y queremos amarrarlas gravitacionalmente. Para facilitar el cálculo supongamos que ya se tiene a unas cuantas partículas amarradas inicialmente, de tal manera que existe una densidad $\rho(\mathbf{r})$ y un potencial $\phi(\mathbf{r})$ predeterminado por estas masas. Traigamos a una masa infinitesimal δm desde infinito hasta la posición $\mathbf{r}$. El trabajo hecho al realizar este proceso está dado por $\delta m\,\phi(\mathbf{r})$. De esta manera, debido a que hemos añadido un incremento de densidad $\delta\rho(\mathbf{r})$ a la configuración inicial, el cambio en la energía potencial de la configuración está dado por

$$\delta W = \int \delta\rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dV. \tag{25.2}$$

Utilizando la ecuación de Poisson para el campo gravitacional

$$\Delta\phi := \nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \tag{25.3}$$

y el teorema de Gauss, la ecuación (25.2) puede ser escrita como

[†]¿Por qué se le llama energía de amarre? Simplemente porque es la energía necesaria para llevar a la partícula de masa m desde una posición $\mathbf{r}$ hasta infinito. Dicho de otro modo, es la energía que mantiene amarrada a la partícula de masa m a la distancia $\mathbf{r}$ sobre el campo gravitacional ϕ.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G}\int \phi\nabla^2(\delta\phi)\,\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi G}\left\{\cancel{\int \phi\nabla(\delta\phi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}} - \int \nabla\phi\cdot\nabla(\delta\phi)\right\}. \tag{25.4}$$

La primer integral del lado derecho de la ecuación (25.4) se anula debido a que el campo se desvanece en infinito[†]. Por otra parte, $\nabla\phi\cdot\nabla(\delta\phi) = \delta|\nabla\phi|^2/2$ y entonces la ecuación (25.4) toma la forma

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi G}\delta\left(\int |\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}V\right). \tag{25.5}$$

Si ahora sumamos todas las contribuciones a la energía de amarre, es decir, $\int \delta W$, entonces obtenemos la *energía de amarre* de un objeto que se encuentra atado gravitacionalmente entre sí

$$W = -\frac{1}{8\pi G}\int |\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}V = -\frac{1}{8\pi G}\left\{\cancel{\int \phi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}} - \int \phi\nabla^2\phi\,\mathrm{d}V\right\} = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V, \tag{25.6}$$

en donde el penúltimo y último paso de la ecuación (25.6) se obtuvieron respectivamente utilizando el teorema de la divergencia y la ecuación de Poisson (25.3). El valor absoluto de la energía de amarre representa la energía mínima necesaria para –por ejemplo– dada una configuración atada gravitacionalmente (e.g. una estrella, una nube, etc.) enviar a cada una de sus partículas hasta infinito, de tal forma que no volverán a recuperar su amarre de ninguna manera[‡].

[†]Para ser exactos, el campo $\phi \propto 1/r$ cuando $\mathbf{r} \to \infty$ y en el mismo límite $|\mathrm{grad}\,\phi| \propto r^{-2}$ y también $|\mathrm{d}\boldsymbol{a}| \propto r^2$. Con esto es evidente la nulidad de la integral en la ecuación (25.4).

[‡]En la película de la guerra de las galaxias se observa la destrucción del planeta Alderan. La energía mínima necesaria para lograr su destrucción total utilizando la estrella de la muerte está dada por la ecuación (25.6). A manera de curiosidad, calcula cuanta energía de amarre posee la tierra y calcula cuanta energía (en forma de bombas nucleares) se necesita para convertirla en añicos. Para esto te será útil saber que una bomba nuclear genera energías que varían entre 10 (Hiroshima) a 50 (Tsar, la explosión nuclear más violenta realizada por la entonces Unión Soviética) megatones. La bomba Tsar, diseñada por los Soviéticos, podía alcanzar ¡hasta 100 megatones!. Esta bomba no fue creada para su uso en guerra, sino para demostrar el poderío de la Unión Soviética al resto de la humanidad (principalmente a los Estados Unidos de América) durante la guerra fría. Se define un megatón (Mt) como la energía explosiva equivalente a la explosión de 10^6 toneladas de TNT (Tri-Nitro-Tolueno) y que se libera al 100 % en una sola explosión de manera instantánea. Para ser más precisos $1\,\mathrm{Mt} = 10^5\,\mathrm{cal} = 4.2\times10^{15}\,\mathrm{J} = 4.2\,\mathrm{PJ}$(petajoules).

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

§26. Ecuaciones de estructura estelar

El valor numérico del tiempo de colapso de la ecuación (24.5) está dado por

$$t_{col} \approx 27 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{3/2} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/2} \text{min}, \tag{26.1}$$

donde el subíndice $\odot$ se refiere a los valores para el sol. Por ejemplo $R_\odot$ es el radio del sol y $M_\odot$ es la masa del mismo. Por otra parte, el tiempo t_K que se tarda una estrella en agotar toda su energía gravitacional de amarre cuando radia con una luminosidad L se denomina *el tiempo de Kelvin* y está dado por

$$t_{Kelvin} \approx \frac{GM^2}{RL} \approx 3 \times 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-1} \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{-1} \text{años}. \tag{26.2}$$

Para el sol, $t_{col} \ll t_{Kelvin}$ y por lo tanto el sol debe estar muy cerca de un equilibrio hidrostático. Por lo tanto la ecuación (24.1) es válida. Para eliminar a ϕ de esta ecuación lo más simple es tomar el divergente de ambos lados de la igualdad y utilizar la ecuación de Poisson (25.3) para el campo gravitacional. De esta manera se obtiene que

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = -\Delta\phi = -4\pi G\rho. \tag{26.3}$$

Utilizando el hecho de que la simetría es esférica, entonces la ecuación (26.3) puede escribirse como

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho. \tag{26.4}$$

La manera tradicional de obtener la ecuación (26.4) (aunque quizás no la más directa) es como sigue. Consideremos una nube (o estrella) que se encuentra en equilibrio de fuerzas de presión y fuerzas gravitacionales. De esta manera la ecuación (24.1) se convierte en la relación (24.2), donde $m(r)$ (la masa contenida dentro del cascarón con radio r) está dado por la igualdad (24.3). La ecuación (24.3) puede escribirse como

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \tag{26.5}$$

Multiplicando la ecuación (24.2) por r^2, derivando con respecto a r y utilizando la

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

ecuación (26.5) se obtiene

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho r^2. \tag{26.6}$$

que es justamente la ecuación (26.4).

Las ecuaciones (24.2) y (26.5) son excesivamente importantes para el estudio de la estructura de interiores estelares. Se denominan respectivamente *primera* y *segunda ecuaciones de estructura estelar*.

Tarea 8

En lo subsecuente utilizaremos lo que se conoce como un gas politrópico. *Se dice que un cambio politrópico en las variables termodinámicas de un gas ocurre si dicho cambio se realiza de manera cuasi–estática y es tal que su calor específico permanece constante durante todo el proceso termodinámico. A partir de esto puede mostrarse que la presión* p *y la densidad* ρ *de dicho gas están relacionadas mediante*

$$p \propto \rho^{\kappa}, \tag{26.7}$$

donde la constante κ *se conoce como el* índice politrópico. *Como ya sabemos, en el caso de un gas ideal su valor es* $\kappa = 5/3$ *para un gas monoatómico. De hecho en este caso* $\kappa = c_V/c_p$, *el cociente entre los calores específicos a volumen y presión constante respectivamente. En el caso de un gas isotérmico la ecuación de estado de un gas ideal implica que* $p \propto \rho$, *es decir el índice politrópico tiene un valor igual a la unidad. Para el caso de un gas de fotones o un gas de partículas relativistas (por ejemplo, electrones relativistas) el valor de este índice es* $\kappa = 4/3$. *La gente que estudia estructuras estelares suele escribir la ecuación* (26.7) *como*

$$p \propto \rho^{1+1/n}, \tag{26.8}$$

y define el índice politrópico *como* n. *Así pues, cuando* $n = 3/2$ *el gas es un gas monoatómico ideal y cuando* $n = 3$, *el gas representa un gas de fotones. En nuestro caso utilizaremos siempre la notación como en la ecuación* (26.7), *sin embargo para esta tarea es más conveniente utilizar la notación de la ecuación* (26.8).

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

(I) *Muestra que la ecuación* (26.4) *puede ser llevada a la forma*

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n, \tag{26.9}$$

donde

$$\rho := \lambda\theta^n, \qquad r := \alpha\xi, \qquad p = k\rho^{1+1/n}$$
$$\alpha := \left\{\frac{\kappa\,(n+1)}{4\pi G}\lambda^{1/n-1}\right\}^{1/2}$$

La ecuación (26.9) *es una de las ecuaciones más importantes de la estructura estelar y se denomina* ecuación de Lane–Emden de orden n *y describe la variación de las cantidades hidrodinámicas como función de la posición para una estrella en equilibrio hidrostático.*

(II) *Las condiciones de frontera usadas en la ecuación* (26.9) *en en el caso de una estrella son* $p = \rho = 0$ *en* $r = R$, $dp/dr = 0$ *en* $r = 0$ *y* $\theta = 1$ *en* $r = 0$. *Cuando* $\theta = 0$, *es decir,* $r = R$ *se obtiene que* $\xi = \xi_1(n)$, *donde la función* ξ_1 *depende del índice politrópico en cuestión. Muestra que bajo estas circunstancias, el radio y la masa de una estrella están dados respectivamente por*

$$R = \alpha\xi_1(n) = \left\{\frac{(n+1)\,k}{4\pi G}\right\}^{1/2}\rho_c^{(1-n)/2n}\xi_1(n), \tag{26.10}$$

$$M(\xi = \xi_1) = -4\pi\left\{\frac{(n+1)\,k}{4\pi G}\right\}^{3/2}\rho_c^{(3-n)/2n}\left[\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_1}, \tag{26.11}$$

donde ρ_c *es el valor de la densidad en el centro de la estrella y es tal que* $\lambda = \rho_c$.

(III) *Utilizando las ecuaciones* (26.10)-(26.11) *o de alguna otra manera, muestra que al eliminar* ρ_c *se obtiene*

$$M^{n-1} \propto R^{n-3}k^n \tag{26.12}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

que toma el sencillo aspecto

$$M \propto R^{\frac{n-3}{n-1}}. \tag{26.13}$$

cuando κ es constante. En el caso en que $n = 3$ (presión de radiación) entonces M es constante y R no queda determinada. Sin embargo, cuando $n = 3/2$ (presión de gas) entonces $M \propto R^3$.

(IV) *Por otra parte, para una configuración en equilibrio muestra que*

$$\frac{d}{dr}\left(p + \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4}\right) < 0. \tag{26.14}$$

De la ecuación (26.14) se obtiene que la cantidad $p + Gm^2/8\pi r^4$ alcanza su valor máximo en el centro de la estrella. Por lo tanto

$$p_c > \frac{GM^2}{8\pi R^4} \approx 4.4 \times 10^{13} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-4} \text{N m}^{-2}, \tag{26.15}$$

donde $M := m(R)$ es la masa total de la estrella. Dimensionalmente, la presión central está dada por

$$p_c \sim \frac{\text{energía de amarre}}{\text{volumen}} \sim \text{densidad de energía} \sim \frac{GM^2}{R^4}. \tag{26.16}$$

Para el sol, el valor de esta presión central falla por un factor de alrededor de cien debido a que no se consideró la acumulación central de gas que se encuentra en el centro de las estrellas.

Si suponemos que el sol se comporta como un gas ideal, entonces, la presión del gas p, la temperatura T y la densidad de masa ρ (o el número de partículas por unidad de volumen n) están relacionadas mediante la *ecuación de estado del gas ideal*

$$p = \frac{k_B}{\mu m}\rho T = n k_B T = \frac{\mathscr{R}}{\mu}\rho T, \tag{26.17}$$

en donde $\mathscr{R}$ representa la constante universal de los gases, k_B es la constante de Boltzman, μ es el peso molecular medio y m es la masa promedio de las especies de partículas en el gas.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Utilizando las ecuaciones (26.17) y (26.16) se puede calcular la temperatura central de una estrella

$$T_c \sim \frac{GM^2}{R^4}\frac{\mu m}{k_B \rho} \sim 6 \times 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-4} \left(\frac{\rho}{\rho_\odot}\right)^{-1} \text{K}. \tag{26.18}$$

En el caso de estrellas como el sol (las cuales están dominadas por hidrógeno), debido a que el producto $k_B T$ es mucho mayor que la energía de amarre de un átomo de hidrógeno (13.5 eV) entonces el gas se encuentra totalmente ionizado y por lo tanto $\mu \sim 0.5$.

De la ecuación (26.18) y utilizando el hecho de que $\rho \sim MR^{-3}$ se sigue que

$$k_B T_c \sim \frac{GM\mu m}{R} \tag{26.19}$$

A este resultado se le conoce como el *teorema virial*. En el caso de estrellas (o de cualquier sistema cerrado autogravitante de masas que se encuentra amarrado por fuerzas de cuadrado inversas) sucede que

$$\bar{E}_{cin} = -\frac{\bar{E}_{pot}}{2}, \tag{26.20}$$

en donde $\bar{E}_{cin}$ representa a la energía cinética promedio (en el tiempo) y $\bar{E}_{pot}$ es la energía potencial promedio.

Investiguemos más con respecto al teorema virial. En el caso de una estrella la energía potencial está dada por la energía de amarre gravitacional de la estrella[†]

$$E_{pot} = -4\pi G \int_0^R \frac{m(r)}{r} \rho r^2 dr. \tag{26.22}$$

[†]El cálculo de la energía de amarre gravitacional de una masa esféricamente simétrica se hace sustituyendo la ecuación (6.9) en la ecuación (25.6). Estas integrales son un tanto cuanto complicadas, por lo que es mejor hacer el cálculo de manera directa como se hizo para la demostración de la ecuación (25.6). Consideremos que se tiene toda la masa de la estrella en infinito y que se va a ensamblar parte por parte a la misma. Supongamos que una cierta masa $m(r)$ dada por la ecuación (24.3) ya se encuentra amarrada. Si ahora se ensambla un cascarón de masa $dm(r)$ a la masa original, entonces el trabajo hecho para traer desde infinito a este cascarón de ancho dr está dado por $-Gm(r)\,dm(r)/r$. Por lo tanto, el trabajo total en ensamblar a una masa esféricamente simétrica desde infinito está dado por

$$W = -G\int \frac{m(r)\,dm(r)}{r} = -G\int \frac{m(r)\rho(r)\,dV}{r}. \tag{26.21}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Utilizando la ecuación de balance hidrostático (24.2) e integrando por partes con la condicione de que la presión $p = 0$ en $r = R$, se obtiene

$$E_{pot} = 4\pi \int \frac{dp}{dr} r^3 dr = -3 \int_0^R p\, dV. \tag{26.23}$$

Utilizando el hecho de que para un gas ideal la energía cinética está dada por

$$E_{kin} = \frac{3}{2} n k_B T, \tag{26.24}$$

y la ecuación del gas ideal (26.17) se obtiene entonces que

$$E_{grav} = -2E_{cin}. \tag{26.25}$$

El teorema del virial es un resultado tan importante que vale la pena demostrarlo en su forma general. Tomemos el producto interior de la ecuación de Euler (23.6) con el vector posición $\mathbf{r}$ e integremos sobre todo el volumen que ocupa el objeto gaseoso para obtener

$$\int \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rho\, dV = -\int \mathbf{r} \cdot \nabla p\, dV - \int \rho \mathbf{r} \cdot \nabla \phi\, dV, \tag{26.26}$$

donde el punto denota derivada con respecto al tiempo $\dot{[]} := d/dt$. Si ahora utilizamos el hecho de que $d(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})/dt = (1/2) d^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})/dt^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}$, entonces la integral del lado izquierdo de la ecuación (26.26), con ayuda de la ecuación de continuidad (22.3), se puede escribir como

$$\begin{aligned} \int \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rho\, dV &= -\int \dot{r}^2 \rho\, dV + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \dot{\mathbf{r}}^2}{dt^2} \rho\, dV. \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - 2\mathscr{T} \end{aligned} \tag{26.27}$$

en donde

$$I = \int \mathbf{r}^2 \rho\, dV, \qquad \text{y} \qquad \mathscr{T} = \frac{1}{2} \int \rho \dot{r}^2 dV, \tag{26.28}$$

representan el momento de inercia y la energía cinética (macroscópica) del sistema respec-

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

tivamente.

Con ayuda del teorema de Gauss y la identidad $\nabla\cdot(\mathbf{r}p) = \mathbf{r}\cdot\nabla p + p\nabla\cdot\mathbf{r}$ el primer término del lado derecho de la ecuación (26.26) puede escribirse como

$$\int \mathbf{r}\cdot\nabla p\,\mathrm{d}V = \oint \mathbf{r}p\mathrm{d}\mathbf{a} - 3(\kappa-1)\mathscr{U}, \tag{26.29}$$

en donde, de acuerdo a la definición de un gas politrópico y la primera ley de la termodinámica, la energía interna del sistema para un gas politrópico está dada por

$$\mathscr{U} = \frac{1}{\kappa-1}\int p\,\mathrm{d}V. \tag{26.30}$$

Cantidades como la presión y la densidad se toman siempre nulos en la frontera del cuerpo al que se refieren. Por lo tanto, la integral de superficie del lado derecho de la ecuación (26.29) se anula.

Finalmente, la segunda integral de la ecuación (26.26) se puede llevar al arreglo

$$\begin{aligned}
\int \rho\mathbf{r}\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}V &= -G\iint \rho\rho'\mathrm{d}V\mathrm{d}V'(\mathbf{r}\cdot\nabla)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\\
&= -G\iint \rho\rho'\mathrm{d}V\mathrm{d}V'(\mathbf{r}'\cdot\nabla')\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\\
&= -\frac{1}{2}G\iint \rho\rho'\mathrm{d}V\mathrm{d}V'(\mathbf{r}\cdot\nabla+\mathbf{r}'\cdot\nabla')\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\\
&= -\frac{1}{2}G\iint \frac{\rho\rho'\mathrm{d}V\mathrm{d}V'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\\
&:= -\mathscr{M},
\end{aligned} \tag{26.31}$$

que de acuerdo a la ecuación (25.6) representa la energía de amarre del sistema.

Sustituyendo las ecuaciones (26.27), (26.29) y (26.31) en la relación (26.26), se obtiene el *teorema virial escalar*

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} = 2\mathscr{T} + 3(\kappa-1)\mathscr{U} + \mathscr{M}. \tag{26.32}$$

Tarea 9

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

En componentes, la ecuación de Euler (23.7), *puede escribirse como*

$$\rho\frac{dv_\mu}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_\mu} - \rho\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}. \tag{26.33}$$

Multiplicando la ecuación (26.33) *por* x_ν *e integrando sobre todo el volumen que ocupa la masa de gas se obtiene*

$$\int \rho x_\nu \frac{dv_\mu}{dt} dV = -\int x_\nu \frac{\partial p}{\partial x_\mu} dV - \int \rho x_\nu \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} dV. \tag{26.34}$$

(I) *Muestra que*

$$\int \rho x_\nu \frac{dv_\mu}{dt} dV = \int \rho \frac{d}{dt}\left(x_\nu \frac{dx_\mu}{dt}\right) dV - 2\mathscr{T}_{\mu\nu}, \tag{26.35}$$

en donde el tensor

$$\mathscr{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int \rho v_\mu v_\nu dV, \tag{26.36}$$

representa el "tensor" de energía cinética. De hecho la contracción de este tensor da la energía cinética del sistema

$$\mathscr{T}_{\mu\mu} = \mathscr{T} = \frac{1}{2}\int \rho \boldsymbol{v}^2 dV. \tag{26.37}$$

(II) *Con ayuda del teorema de Gauss muestra que*

$$-\int x_\nu \frac{\partial p}{\partial x_\mu} dV = -\int p x_\nu da_\mu + \delta_{\mu\nu}(\kappa - 1)\mathscr{U}, \tag{26.38}$$

donde la energía interna del sistema está dada por

$$\mathscr{U} = \frac{1}{\kappa - 1}\int p\, dV, \tag{26.39}$$

para un gas politrópico de índice κ.

(III) *Demuestra con ayuda de la ecuación* (6.8) *que el tensor*

$$\mathscr{M}_{\mu\nu} := -\int \rho x_\nu \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} dV = -G\int dV dV' \rho(r)\rho(r')\frac{x_\mu(x_\nu - x'_\nu)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{26.40}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Con esto muestra que el tensor $\mathscr{M}_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico. Muestra también que

$$\mathscr{M}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}G\int dV d\,V'\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')\frac{(x_\mu - x'_\mu)(x_\nu - x'_\nu)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{26.41}$$

y como la contracción

$$-\mathscr{M} := -\mathscr{M}_{\nu\nu} = -\frac{1}{2}G\int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\,V d\,V', \tag{26.42}$$

representa la energía de amarre del sistema, entonces el tensor $\mathscr{M}_{\mu\nu}$ se denomina el tensor de energía de amarre del sistema.

(IV) *Con todo esto muestra que*

$$\int \rho\frac{d}{dt}\left(x_\nu\frac{dx_\mu}{dt}\right)d\,V = 2\mathscr{T}_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu}(\kappa-1)\mathscr{U} + \mathscr{M}_{\mu\nu} - \int p x_\nu da_\mu. \tag{26.43}$$

Si suponemos que la presión –y por lo tanto la densidad también– se anula en la superficie que acota al volumen de gas, entonces la integral del lado derecho de la ecuación (26.43) *se anula. Así, como el lado derecho de la ecuación contiene tensores simétricos, necesariamente el tensor del lado izquierdo de esta ecuación es simétrico*

$$\int \rho\frac{d}{dt}\left(x_\nu\frac{dx_\mu}{dt}\right)d\,V = \int \rho\frac{d}{dt}\left(x_\mu\frac{dx_\nu}{dt}\right)d\,V. \tag{26.44}$$

(V) *Utilizando la simetría del tensor de la ecuación* (26.44) *muestra que este mismo tensor puede escribirse como*

$$\frac{1}{2}\int \rho\frac{d}{dt}\left(x_\nu\frac{dx_\mu}{dt} + x_\mu\frac{dx_\nu}{dt}\right)d\,V = \frac{1}{2}\frac{d^2 I_{\mu\nu}}{dt^2}, \tag{26.45}$$

en donde el tensor de inercia $I_{\mu\nu}$ está dado por

$$I_{\mu\nu} = \int \rho x_\mu x_\nu d\,V, \tag{26.46}$$

y es tal que satisface

$$I = I_{\nu\nu} = \int \rho\mathbf{r}^2 d\,V, \tag{26.47}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

en donde I *es el momento de inercia.*

De la ecuación (26.43) *y la ecuación* (26.45) *se obtiene el* ***teorema virial en su forma tensorial***

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I_{\mu\nu}}{dt^2} = 2\mathscr{T}_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu}(\kappa - 1)\mathscr{U} + \mathscr{M}_{\mu\nu}. \tag{26.48}$$

La contracción de la ecuación (26.48) *produce el teorema del virial escalar*

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\mathscr{T} + 3(\kappa - 1)\mathscr{U} + \mathscr{M}. \tag{26.49}$$

(VI) *Finalmente, utilizando la ecuación* (26.44), *o de cualquier otra manera, muestra que el momento angular del sistema se conserva, es decir*

$$\frac{d}{dt}\int \rho \left(x_\nu \frac{dx_\mu}{dt} - x_\mu \frac{dx_\nu}{dt} \right) dV = 0. \tag{26.50}$$

§27. Generación de reacciones nucleares

Un colapso gravitacional implica que la energía térmica aumenta pues $T \propto 1/r$ (cf. ecuación (26.19)). En el caso de estrellas esto genera una autoregulación de los procesos de energía termonuclear en regiones donde la presión es dominada por presión térmica. De hecho un colapso eleva la temperatura quien a su vez incrementa la taza de generación de energía termonuclear y por lo tanto la presión térmica (presión es densidad de energía) se eleva de tal manera que se evita un colapso gravitacional.

La energía térmica específica contando los tres grados de libertad disponibles de las partículas está dada por

$$E_T = \frac{3}{2}\frac{k_B T}{\mu m}, \tag{27.1}$$

y la energía interna específica ϵ está dada por

$$\epsilon = c_V T, \tag{27.2}$$

donde c_V es el calor específico a volumen constante que está relacionado con el calor específico a presión constante c_p mediante la relación

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$c_p - c_V = \frac{k_B}{\mu m} \quad \text{y} \quad \kappa = c_p/c_V. \tag{27.3}$$

Así pues, la energía térmica y la interna están relacionadas mediante

$$E_T = \frac{3}{2}(\kappa - 1)\epsilon = -\frac{1}{2}E_{grav}, \tag{27.4}$$

de acuerdo al teorema virial (26.25) para una estrella. Por lo tanto, la energía total E_{tot} de una estrella está dada por

$$E_{tot} = \epsilon + E_{grav} = \frac{3\kappa - 4}{3(\kappa - 1)}E_{grav}. \tag{27.5}$$

De esta manera, cuando $\kappa > 4/3$ entonces $\epsilon > |E_{grav}|$ y por lo tanto no existe un colapso gravitacional. Sin embargo cuando $1 < \kappa < 4/3$ entonces la energía total es negativa y al no haber suficiente presión térmica, puesto que $\epsilon < |E_{grav}|$, se genera un colapso gravitacional. En los ejemplos previos se ha considerado gases para los cuales $\kappa = 5/3$ y por lo tanto son capaces de detener un colapso gravitacional mediante la presión térmica que el mismo gas produce. Sin embargo, existe otra situación para la cual $\kappa = 4/3$. Esto ocurre cuando la presión está dominada por la radiación de la estrella o bien por presión degenerativa relativista como veremos más adelante. Las configuraciones de equilibrio en estos casos son inestables.

Cuando se origina un colapso gravitacional a partir de una nube de gas difusa la mayor parte de la energía gravitacional es radiada y la presión central y la temperatura se elevan hasta que se da lugar a fusión termonuclear. El elemento más abundante en el universo ($\sim 70\,\%$) es hidrógeno y por lo tanto la reacción termonuclear a que se da origen es a la fusión de hidrógeno en helio. Para esto se requiere temperaturas del orden de 10^6 K. A esta temperatura el gas se encuentra altamente ionizado. Para estrellas como el sol, la reacción más importante es la *cadena protón–protón* (cadena p–p)

$$\begin{aligned} p + p &\longrightarrow D + e^+ + \nu_e \\ p + D &\longrightarrow He^3 + \gamma \\ He^3 + He^3 &\longrightarrow He^4 + 2p, \end{aligned} \tag{27.6}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

que genera del orden de 26.6 MeV por cada He^4 formado. Esto equivale a $\sim 0.007mc^2$, donde m es la masa inicial de los cuatro protones utilizados en la cadena. La taza de cambio de la generación de energía específica (energía por unidad de tiempo por unidad de masa) es $\epsilon \propto \rho T^4$ y tiene un valor de $\sim 10^{-4}\,W\,kg^{-1}$ para el sol.

Reacciones más energéticas son llevadas acabo, siendo el *ciclo CNO* (Carbón–Nitrógeno–Oxigeno) la más importante para estrellas masivas. En este caso, la taza de cambio de generación de energía específica está dada por $\epsilon_{CNO} \propto \rho T^{15}$.

La conservación de la energía generada en el interior de una estrella debida a sus reacciones nucleares puede escribirse como

$$L = \int \rho\epsilon d\,V = 4\pi \int \rho\epsilon r^2 dr,$$

en donde L es la luminosidad y ϵ es la energía específica (energía por unidad de masa) por unidad de tiempo que se genera dentro de la estrella. Esta última ecuación es comúnmente escrita en forma diferencial y representa la *tercera ecuación de estructura estelar*

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho\epsilon. \tag{27.7}$$

La energía generada en el interior del sol escapa del mismo debido a radiación cerca del núcleo y a convección en las partes más externas.

La cuarta y última ecuación de estructura estelar tiene que ver con el transporte de energía del centro hacia la superficie de la estrella. Esto corresponde a transportar energía por conducción, convección y/o radiación de las partes centrales de una estrella hacia su exterior. De estas formas de transporte energético, la conducción y la radiación no son muy diferentes. La conducción, llevada acabo principalmente por electrones, consiste en que electrones con energías elevadas provenientes de regiones calientes colisionen con electrones de energías bajas que se encuentran en regiones frías, transmitiendo de esta manera energía y elevando así la temperatura. En el caso de la radiación, son los fotones los que se encargan de energetizar (calentar) las partes menos energéticas (frías) de la estrella.

El contenido energético y el camino libre medio (i.e. la distancia promedio que recorre una partícula entre dos colisiones sucesivas) de los electrones y/o los fotones son los factores que determinan la eficiencia del transporte energético. La energía térmica de los

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

electrones ($= (3/2)nk_BT$) es mucho mayor que la energía térmica de los fotones ($= aT^4$)[†]. Por otra parte, si el camino libre medio es grande, entonces las partículas (electrones o fotones) pueden recorrer grandes distancias, partiendo desde regiones en donde la temperatura es elevada, hasta los lugares en los cuales la temperatura es baja y de esta manera transferir su energía eficientemente. A pesar de que ni los electrones ni los fotones tienen caminos libres medios grandes para el caso de estrellas, el camino libre medio de los fotones es considerablemente mayor al de los electrones. Por esta razón es necesario discutir los mecanismos de conducción y radiación para ambas especies, electrones y fotones.

A diferencia de la radiación y la conducción, que son producidas por gradientes de temperatura, las corrientes convectivas en un fluido se generan solamente cuando los gradientes de temperatura alcanzan un cierto valor. Dicho de otro modo, la convección comienza debido a que el estado del fluido sin movimiento resulta ser inestable. No es difícil calcular cuando la convección ocurre en un fluido. Lo difícil es saber cuanta energía es transportada mediante convección en el caso de una estrella. No se tienen ni experimentos de laboratorio ni teorías precisas que describan a la convección estelar. De hecho, la ausencia de una teoría buena de la convección es uno de los peores defectos en los estudios actuales de la estructura estelar y su evolución. Es por esta razón que la convección se omite generalmente cuando uno realiza estudios de transporte de energía para el caso de estrellas.

Ya sea que se considere transporte de energía por conducción o radiación, el flujo de energía F (energía por unidad de área por unidad de tiempo) puede expresarse como gradientes de temperatura T en cada caso respectivamente como

[†]Recuerda que para un cuerpo negro la densidad de energía radiada e (energía por unidad de volumen) está dada por la ley de Boltzman

$$e = aT^4, \tag{27.8}$$

en donde

$$a = \frac{4\sigma}{c} = 7.55 \times 10^{-16}\,\mathrm{J\,m^{-3}\,K}, \tag{27.9}$$

es la *constante de densidad de radiación* y la constante de Stephan–Boltzman σ tiene el valor

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B}{60\hbar^3 c^2} = 5.6 \times 10^{8}\,\mathrm{kg\,s^{-3}\,K^{-4}}. \tag{27.10}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$F_{cond} = -\lambda_{cond}\frac{dT}{dr},$$
$$F_{rad} = -\lambda_{rad}\frac{dT}{dr}, \tag{27.11}$$

donde λ_{cond} y λ_{rad} son factores positivos de proporcionalidad denominados *coeficientes de conductividad y radiación térmica* respectivamente. El signo menos en el lado derecho de la ecuación (27.11) significa que el flujo se transporta de las regiones con temperatura altas a las regiones con temperaturas bajas. Los factores de proporcionalidad de estas ecuaciones están determinados por

$$\kappa = \frac{4acT^3}{3\rho\lambda}, \tag{27.12}$$

en donde κ representa la *opacidad* del material estelar. La opacidad mide la resistencia de un material (en este caso el gas de la estrella) al flujo de calor. De aquí puede mostrarse que la probabilidad de que un fotón sea absorbido al recorrer una distancia δx esté dada por $\kappa\rho\delta x$.

Utilizando la ecuación (6.1) entonces el transporte que se lleva acabo por radiación y conducción, como se muestra en la ecuación (27.11), puede escribirse como energía transportada por unidad de tiempo L (la luminosidad) de la siguiente forma

$$L = 4\pi r^2 (F_{cond} + F_{rad}) = -\frac{16\pi acr^2T^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{dr}, \tag{27.13}$$

en donde

$$\frac{1}{\kappa} := \frac{1}{\kappa_{rad}} + \frac{1}{\kappa_{cond}}. \tag{27.14}$$

La ecuación (27.13) es la cuarta ecuación de estructura y se denomina *ecuación de transporte energético*. Utilizando el hecho de que la presión de radiación p_{rad} para un cuerpo negro está dada por

$$p_{rad} = \frac{a}{3}T^4, \tag{27.15}$$

entonces la ecuación (27.13) puede reescribirse como

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$\frac{dp_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa_B L \rho}{4\pi c r^2}, \tag{27.16}$$

que tiene una forma semejante a la ecuación (24.2).

§28. Modelos estelares

Para hacer un modelo estelar, las cuatro ecuaciones de estructura estelar tienen que ser resueltas en conjunto con una ecuación para el coeficiente de absorción κ. Estas ecuaciones llevan además condiciones a la frontera (superficie) y los valores de las masas se obtienen de observaciones astronómicas. En la gran mayoría de los casos esto requiere cálculos numéricos. Sin embargo, es posible obtener ciertas *relaciones de escala* como funciones de M, R o L. Por ejemplo, utilizando la ecuación (27.13) y la ecuación (26.19) se obtiene respectivamente que

$$\frac{L}{R^2} \propto \frac{T^4}{\kappa \rho R}, \tag{28.1}$$

$$T \propto \frac{M}{R}, \tag{28.2}$$

$$\rho \propto \frac{M}{R^3}. \tag{28.3}$$

De estas relaciones se observa en particular que la luminosidad es proporcional al cubo de la masa. Esta relación se denomina la *relación de masa–luminosidad*. En el caso de estrellas masivas, la dispersión por electrones domina la difusión radiativa y entonces el coeficiente de absorción κ es una constante. De esta manera la presión térmica domina sobre la presión radiativa. De las ecuaciones (28.1) y (28.2) se obtiene que $L \propto M^3$.

Mas o menos 12 % de la masa de una estrella se quema con el proceso de fusión $H \rightarrow He$. Para el caso del sol esto equivale a un tiempo de vida medio de 10^{10} años y se puede mostrar que este valor escala como el reciproco del cuadrado de la masa de la estrella.

Cuando el hidrógeno en el núcleo de una estrella se agota, entonces este mismo se contrae para elevar la temperatura de tal manera que se pueda entonces quemar helio. La envolvente externa de la estrella entonces se agranda por un factor de 100 o más. No hay una descripción simple del porque esto ocurre. Estos cálculos se hacen de manera

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

computacional y representan bastante bien el comportamiento que describen las estrellas de manera observacional, en el cual la envolvente de la estrella se expande de manera excesiva. Cuando esto sucede la estrella se encuentra en su etapa de *gigante roja* (gigante porque es mucho más grande que la estrella original y roja porque radia en el rojo del espectro óptico). Esta etapa de la estrella es de mucho menor duración que la etapa del quemado de hidrógeno debido a la elevada temperatura del núcleo estelar.

Finalmente mostremos que la presión de radiación ($\sim aT^4$) –cf. ecuación (27.15)– es mucho más importante que la presión de gas ($\sim nk_BT$) para estrellas de masa elevada. Para esto basta utilizar las ecuaciones (28.1)-(28.3), así como la ley del gas ideal (26.17), y así obtener

$$p_{gas} \sim nk_BT \sim \frac{GM^2}{R^4}, \qquad p_{rad} \sim aT^4 \sim \frac{aG^4M^4(\mu m)^4}{R^4k_B^4}. \tag{28.4}$$

De esta manera, cuando $p_{rad} > p_{gas}$ entonces se tiene que

$$M \gtrsim \frac{k_B^2}{a^{1/2}(\mu m)^2 G^{1/3}} \sim 6M_\odot.$$

Las estrellas que están soportadas por presión de radiación tienen un índice politrópico $\kappa \sim 4/3$ y por lo tanto son propicias a un colapso o a una expansión, dependiendo de las condiciones iniciales de su estructura, así como de las condiciones energéticas de la misma. Con esto y utilizando el límite de Eddington mencionado más adelante es posible poner una cota superior de $\lesssim 100M_\odot$ a la masa de las estrellas. Estrellas de masa más elevada que este límite, no pueden existir en la naturaleza.

§29. Presión degenerativa

El límite inferior a la masa de una estrella está dado por *presión degenerativa*, una presión que sucede por efectos cuánticos cuando la densidad se incrementa. Para ser exactos, la presión degenerativa se da debido a la compresión de fermiones (partículas con spin múltiplos de $1/2$ como por ejemplo protones, electrones, neutrones) y que obedecen el *principio de exclusión de Pauli*, el cual dice que solamente dos fermiones pueden encontrarse en un mismo nivel de energía con spins de signos opuestos. Cuando la materia se

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

comprime, el punto cero de energía o *punto de Fermi* se eleva y esto genera una presión adicional (presión es energía por unidad de volumen).

Una forma aproximada para describir a la presión degenerativa se obtiene con ayuda del *principio de incertidumbre de Heisenberg* de la mecánica cuántica:

$$\Delta p \, \Delta x \approx \hbar, \tag{29.1}$$

en donde $\hbar$ es la constante de Planck en unidades de 2π, p es el momento y x la posición de una partícula (e.g. un electrón). El nivel cero de energía no–relativista por partícula está dado por

$$E_{deg} = \frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2m\Delta x^2}, \tag{29.2}$$

en donde el último paso se obtiene del principio de incertidumbre de Heisenberg. De la ecuación (29.2) se ve que la energía disponible por partícula se incrementa a medida que el tamaño disponible por partícula Δx decrece. La presión p_{deg} (presión degenerativa) que esta energía origina (presión es energía sobre volumen) para el caso de N partículas en un volumen V está dado por

$$p_{deg} \approx \frac{N}{V}\frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2m} n^{5/3}, \tag{29.3}$$

en donde $n = N/V$ es el número de partículas por unidad de volumen y $\Delta x \approx (V/N)^{1/3} = (1/n)^{1/3}$. De la ecuación (29.3) se ve que $p_{deg} \propto n^{5/3}$ y por lo tanto la presión degenerativa no–relativista se comporta como un gas politrópico cuyo índice $\kappa = 5/3$. Además esta presión es inversamente proporcional a la masa m. De esta manera se ve que la presión degenerativa de electrones es 2000 veces más fuerte que la presión degenerativa de protones. Por esta razón generalmente se habla de presión degenerativa debida a electrones.

En el caso de que las partículas se estén moviendo en forma relativista, la energía degenerativa está dada por

$$E_{deg,rel} \approx pc = \frac{\hbar c}{\Delta x}. \tag{29.4}$$

De esta manera, la presión degenerativa para el caso relativista está dada por

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$P_{deg,rel} \approx \hbar c n^{4/3}, \tag{29.5}$$

que es una relación politrópica de índice $\kappa = 4/3$. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (27.5), estrellas soportadas por presión degenerativa relativista son propicias a un colapso gravitacional.

Utilizando el concepto de presión degenerativa, es fácil poner una cota inferior a la masa que debe tener una estrella que quema hidrógeno (como el sol). Para esto, basta con utilizar la ecuación (26.18). De esta igualdad se sigue que para que se lleve a cabo la cadena p–p se requiere que $T_c \gtrsim 10^7\,K$. Cuando una nube se colapsa, esta temperatura se alcanza solamente si la presión térmica $p_{gas} = nk_BT_c$ es mayor a la presión degenerativa $p_{deg} = \hbar^2 n^{5/3}/2m_e$, donde m_e es la masa del electrón. Por otra parte, para un sistema virializado, la energía térmica es aproximadamente igual a la energía potencial y por lo tanto $T_c \approx GMm_e/Rk_B \gtrsim 10^7\,K$. De aquí se obtiene que la masa mínima que puede tener una estrella la cual quema hidrógeno en su centro es $\sim 0.05 M_\odot$.

Objetos colapsados que tienen masas inferiores a este valor, digamos $0.03\,M_\odot$, soportan su propia masa mediante presión degenerativa y por lo tanto no llegan a quemar su combustible mediante fisión termonuclear. Objetos demasiado pequeños, tipo Júpiter que tienen una masa $\sim 0.001\,M_\odot$, están soportados por una combinación de presión degenerativa con fuerzas electrostáticas. Esto se debe a que el principio de Pauli y el principio de incertidumbre de la mecánica cuántica se tienen que aplicar para átomos individuales.

Con esto y lo mencionado al final de la sección §27 queda mostrado el resultado importante de que las estrellas que brillan debido a la producción propia de fusión nuclear tienen masas entre 0.05 y $100\,M_\odot$. Éstos valores constituyen cotas mínimas y máximas respectivamente a la masa de una estrella.

§30. Enanas blancas

Objetos colapsados que soportan la gravedad producida por sus masas mediante presión degenerativa se denominan *enanas blancas*. Para estos objetos, la energía total está dada por

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$E = NE_{deg} + E_{grav} = \frac{N^{5/3}\hbar^2}{2m_e V^{2/3}} - G\frac{M^2}{R}, \tag{30.1}$$

para el caso no–relativista. Además, como $N = M/(m_e + m_p) \approx M/m_p$ y $V \sim R^3$, entonces la ecuación (30.1) puede escribirse como

$$E = \frac{\hbar^2 M^{5/3}}{2m_e m_p^{5/3} R^2} - G\frac{M^2}{R}. \tag{30.2}$$

Ahora bien, un sistema mecánico se encuentra en equilibrio si su energía total alcanza un valor mínimo (el mínimo de potencial). De aquí que para que la estrella esté en equilibrio necesariamente se obtiene de la ecuación (30.2) la siguiente relación entre la masa M de la enana y su radio R

$$M \approx \left(\frac{\hbar^6}{m_e^3 G^3 m_p^5}\right)\frac{1}{R^3}. \tag{30.3}$$

Esta relación implica que el radio decrece al aumentar la masa de la enana. Esto se debe al principio de incertidumbre, pues el espacio disponible para los electrones debe de reducirse para que su momento (y por tanto su energía por unidad de volumen o presión) se incremente.

Cuando se tiene electrones relativistas, la energía degenerativa total está dada por

$$E = \hbar c\left(\frac{M}{m_p}\right)^{4/3}\frac{1}{R} - G\frac{M^2}{R}. \tag{30.4}$$

En este caso los dos términos del lado derecho de la ecuación (30.4) son inversamente proporcionales al radio de la enana y por lo tanto no existe un mínimo de energía. De esta manera, la enana es propicia a colapsarse o expandirse a infinito. La masa a la cual esto ocurre está dada por la condición sobre la cual $E = 0$ que corresponde a la masa máxima posible para la cual $E \leq 0$. Esta masa, la *masa de Chandrasekhar*[†] está dada por

[†]El astrofísico Indio S. Chandrasekhar (el famoso Chandra) fascinado por la mecánica cuántica y la astrofísica fue aceptado para realizar sus estudios de posgrado en la Universidad de Cambridge del Reino Unido a la edad de 19 años. En su viaje en barco, que duró aproximadamente tres semanas, encontró esta masa límite, la masa de Chandrasekhar.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$M_{Ch} = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_p^2} \approx 2\, M_\odot. \tag{30.5}$$

El valor exacto de la masa de Chandrasekhar depende de la composición de la enana. Resulta que el punto cero de la energía de los iones de una enana blanca fría y masiva es suficiente para que se pueda producir fusión nuclear, de hecho fusión piconuclear, y el equilibrio es proporcionado por una mezcla de carbono y oxigeno. De aquí puede mostrarse que

$$M_{Ch} \approx 1.4\, M_\odot. \tag{30.6}$$

El camino libre de un electrón en la materia degenerativa es grande. Lo mismo ocurre en metales debido a la misma razón pues los niveles de Fermi se encuentran llenos. Por esta razón la conducción de calor es sumamente eficiente. En la superficie de las enanas blancas se produce una capa de materia no–degenerativa que actúa como una sábana, evitando que el calor de la estrella escape. Por esta razón estas estrellas tardan alrededor de $\sim 10^{10}$ años en enfriarse (radiar toda su energía). Debido a esto, estas estrellas son observadas como estrellas calientes de color blanco. El radio de estas estrellas es del orden del radio de la tierra $R_\delta = 6.3 \times 10^6$ m.

Sirius A es la estrella más brillante en el cielo nocturno. La órbita de esta estrella es perturbada debido a la existencia de una compañera llamada Sirius B. La existencia de Sirius B se infirió debido al movimiento ondulatorio que se observó en la órbita de Sirius A en la década de los años 1830's. Sirius B fue observada directamente en el año 1865. Estas dos estrellas forman un sistema binario con un periodo orbital de 49.9 años y los semiejes mayores a_1 y a_2 de Sirius A y Sirius B obedecen la relación $2a_1 \approx a_2$. Desde el centro de masa del sistema, la ley de Kepler de gravitación puede escribirse como (cf. ecuación (6.5))

$$G\mu\,(M_1 + M_2)\,\pi^2 = 4\pi a^3 \mu, \tag{30.7}$$

donde $\mu = M_1 M_2/(M_1 + M_2)$ es la masa reducida, $M_{1,2}$ son las masas de Sirius A y Sirius B respectivamente y $a = a_1 + a_2$. Con esto y utilizando el hecho de que $M_1 \approx 2M_\odot$ entonces se obtiene que $M_2 \approx 1M_\odot$. Ambas estrellas son de color blanco muy similar. Por lo tanto la temperatura de su superficie T_{sup} debe ser similar, i.e. $T_{sup} \approx 10^4$ K, pero sus

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

luminosidades difieren por un factor $\sim 10^4$. De aquí que como el flujo total F de radiación de un cuerpo negro está dado por $F = \sigma T^4$, entonces

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4. \tag{30.8}$$

Por lo tanto $R_2 \sim R_1/100$ y así $\rho_2 \sim 10^6\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, con lo cual se infiere que Sirius B es una enana blanca.

Las enanas blancas producen un corrimiento al rojo gravitacional $z \sim 10^{-4}$ que fue detectado en la década de los 1960's mediante observaciones espectroscópicas. Las líneas de He no se observan en el espectro de las enanas blancas debido a que el He es más denso que el H y por lo tanto, se hunde en la estrella debido al fuerte potencial gravitacional. Las enanas blancas son estrellas comunes en nuestra galaxia. Casi siempre se les observa en sistemas binarios (para ser precisos, sistemas binarios *compactos y lejanos*, es decir estrellas binarias no muy cercanas entre sí –como la de Sirio). El sol se convertirá en una enana blanca en unos cinco mil millones de años aproximadamente.

§31. Estrellas de neutrones

Cuando la energía degenerativa de un electrón excede la diferencia de masa–energía entre el neutrón y el protón, i.e.

$$E_{\mathrm{deg}} > (m_n - m_p)\,c^2 = 1.29\,\mathrm{MeV}, \tag{31.1}$$

los electrones se mueven a velocidades moderadamente relativistas y entonces se produce el decaimiento inverso–β que está dado por

$$e^- + p \to n + \nu_e. \tag{31.2}$$

La densidad a la que este decaimiento ocurre es del orden de $10^{10}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Cuando las densidades son aún más grandes, entonces la materia está compuesta de neutrones en su mayoría. Los electrones y los iones se encargan de llenar todos los estados libres de la materia y de esta manera mantienen a la misma eléctricamente neutra. Debido a la abundancia de neutrones, la presión degenerativa debida a neutrones domina a la de los

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

electrones.

Es posible hacer un cálculo aproximado del radio que debe de tener un objeto gravitacional soportado por presión degenerativa producida por neutrones. Para esto, basta con utilizar la ecuación (30.3) en el caso de neutrones para obtener

$$M \propto \frac{1}{\left(m_{deg} R\right)^3}.$$

Suponiendo que la masa M es la masa del sol $M_\odot$, entonces se obtiene una relación entre los radios R_{eb} y R_{en} para una enana blanca y una estrella de neutrones respectivamente

$$R_{en} \approx R_{eb} \left(\frac{m_e}{m_p}\right) \approx 10\,\text{km}. \tag{31.3}$$

Con lo pequeño de este radio se obtiene que la separación entre las distintas partículas está dado por $\Delta x \approx (V/N)^{1/3} \approx (\rho/m_p)^{-1/3} \approx 10^{-15}$ m, que es la distancia típica sobre la cual actúa la fuerza nuclear fuerte (i.e. la longitud de onda de Compton del protón). En otras palabras, las partículas están tan cercanas unas de las otras que los núcleos se "tocan" entre sí. Por esta razón la densidad de materia en una estrella de neutrones es comparable con la densidad nuclear. El problema surge debido a que la ecuación de estado para materia densa, digamos dos veces la densidad nuclear, no se conoce experimentalmente. Por lo tanto no resulta muy clara la estructura precisa de las estrellas de neutrones. Por si esto fuera poco el análisis de una estrella de neutrones requiere una teoría relativista de la gravedad pues sucede que para estos objetos, la energía potencial gravitacional GM^2/R es mayor a un diez por ciento de su energía en reposo, es decir, $0.1Mc^2$.

Se puede mostrar que la masa mínima que una estrella de neutrones puede tener es $\sim 0.1M_\odot$. Por debajo de esta masa los neutrones son inestables al decaimiento–β con lo cual el radio se incrementa al disminuir la masa. Existe además un límite superior a la masa de una estrella de neutrones que resulta ser $\sim 3M_\odot$.

§32. Supernovas

Cuando una estrella masiva ($\gtrsim 8\,M_\odot$) alcanza el final de su vida, su núcleo se colapsa y en ocasiones forma una estrella de neutrones. Cuando las estrellas son tan masivas como

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

esta, las reacciones nucleares son tan intensas que llegan a producir hierro en sus núcleos. Más allá de esta reacción termonuclear, la fisión nuclear que se produce es endotérmica, es decir, requiere energía para mantenerse, contrario a una reacción termonuclear normal, la cual genera energía. El resultado es que el núcleo de hierro que se produce, y que está soportado por presión degenerativa, se colapsa. Los rayos gama que se producen debido a la liberación enorme de energía gravitacional causan entonces fotodisociación del núcleo del hierro hasta romperlo por completo y regresarlo a protones y neutrones libres.

En el núcleo se producen entonces temperaturas muy elevadas y una fracción de la energía gravitacional se libera mediante neutrinos. Esto hace que el colapso del núcleo ocurra más lentamente, cambiando el tiempo de caída libre a unos cuantos segundos. Esto se debe a que cuando la densidad es excesivamente alta ($\sim 10^{14}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$), los neutrinos dispersan a la materia. Cuando el núcleo alcanza densidades nucleares entonces el núcleo "rebota" y la materia que está arriba del mismo es lanzada a velocidades del orden de $10^4\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. La rápida liberación de energía y su recombinación subsecuente origina un destello altamente luminoso que llega a tener una luminosidad en el óptico $\sim 10^9\,\mathrm{L_\odot}$. A este fenómeno se le denomina *supernova* (tipo II) en astrofísica. La luminosidad decae rápidamente en los meses subsecuentes debido a que los elementos lanzados por la supernova decaen. Principalmente se observa el decaimiento de especies radioactivas como $\mathrm{Ni^{56}} \rightarrow \mathrm{Co^{56}} \rightarrow \mathrm{Fe^{56}}$. Los núcleos de estas supernovas dejan una estrella de neutrones o un agujero negro en el lugar de la explosión. El agujero negro se observa cuando la masa de la estrella progenitora es $\gtrsim 30\,\mathrm{M_\odot}$.

La mayor perdida de energía debida a la implosión y la explosión de la estrella se debe a la difusión de neutrinos a través del núcleo. El tiempo de difusión que tardan los neutrinos en atravesar el núcleo es $\mathrm{t_{dif}} \sim 10\,\mathrm{s}$ y por lo tanto la luminosidad $\mathrm{L_\nu}$ producida debida a la expulsión de neutrinos está dada por el cociente de la energía de amarre de la estrella de neutrones entre el tiempo de difusión que resulta ser $\mathrm{L_\nu} \approx 10^{45}\,\mathrm{W}$.

La explosión produce grandes flujos de neutrones debido a la nucleosíntesis que se produce gracias a las elevadas temperaturas y densidades en el núcleo. Estos neutrones pasan entre las regiones que cubren al núcleo y se recombinan para formar elementos más pesados que el hierro gracias a una captura rápida del neutrón. Estos nuevos elementos se amarran más rápido de lo que tarda el decaimiento–β. Esta nucleosíntesis en una supernova es el proceso mediante el cual se forman la mayoría de los elementos más pesados que el

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

He. De hecho, los elementos pesados que observas a tu alrededor aquí en la tierra fueron creados en una supernova. Gracias a la explosión de alguna estrella en el remoto pasado de nuestra vecindad galáctica se pudieron formar diversos elementos pesados. Más tarde un colapso gravitacional de una nube contaminada con estos elementos pesados logró la formación del sol y nuestro sistema solar.

Existe otra forma de producir una supernova (tipo I). Ésta se debe a que cuando una enana blanca acreta[†] demasiada masa, entonces llega un momento en el cual la masa de la estrella alcanza (o rebasa) el límite de Chandrasekhar. Este tipo de situación ocurre en algunos sistemas binarios, en los cuales una estrella (por ser más compacta y más masiva) acreta gas de su compañera. Debido a esta situación se produce una implosión/explosión semejante a la mencionada anteriormente, pero la diferencia es que no se produce un objeto compacto como vestigio del proceso físico. Por lo tanto, todo el hierro que se forma durante la explosión es lanzado al espacio. Estas supernovas de tipo I se diferencian de las supernovas tipo II debido a que en su emisión no existen líneas de hidrógeno en el espectro que producen.

Las observaciones de supernova son difíciles, sin embargo hoy en día lo que se trata de hacer es observar supernovas en otras galaxias, con lo cual es posible determinar de manera muy precisa la geometría del universo como veremos más adelante. En nuestra galaxia se conocen los *remanentes* (vestigios) de supernova de cinco supernovas que ocurrieron en los últimos 1000 años. La predicción es que deba ocurrir una supernova en nuestra galaxia más o menos cada 30 años. La gran mayoría de estas supernovas no son visibles debido a que son oscurecidas por el gas del plano de la galaxia. Una de las supernovas más famosas fue la supernova del año 1054 D.C. El remanente se conoce hoy en día como la nebulosa del cangrejo y posee una estrella de neutrones rotante en su interior. Históricamente esta supernova ha sido una de las observaciones más importantes en la historia del hombre. Los Chinos dejaron por escrito el hecho de la gran brillantez que se presentó en el cielo debido a la supernova. Culturas del norte de México y el sur de los Estados Unidos de América realizaron diversos murales de pintura en cavernas dejando marca de la existencia de este fenómeno anormal en el cielo. Finalmente y de gran importancia para Mesoamérica, los Teotihuacanos en México dejaron también un petroglifo que ha sido recientemente

[†]En astrofísica se denomina *acreción* al fenómeno de atracción gravitacional de gas hacia un objeto condensado –en ocasiones compacto– como una estrella o agujero negro.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

identificado como la confirmación de que una explosión supernova en el año 1054 D.C. ocurrió. Este petroglifo se muestra en la Figura V.1.

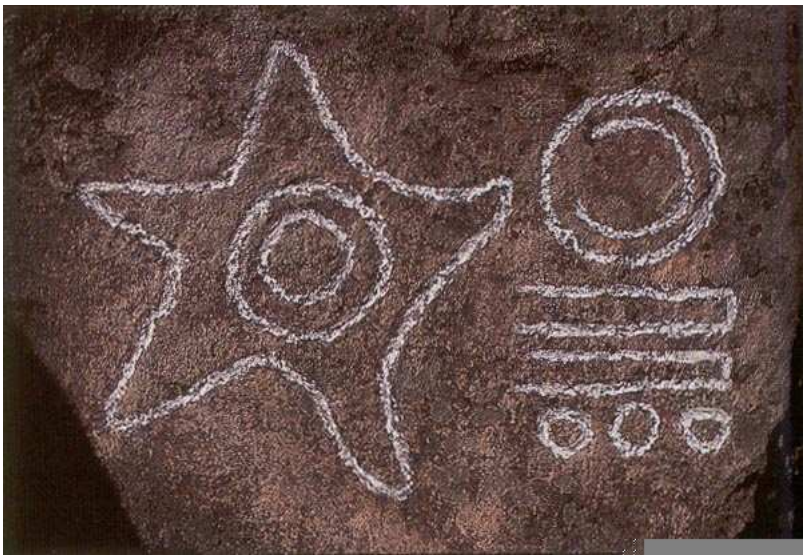

Figura V.1: La figura muestra una fotografía de un petroglifo teotihuacano que describe la presencia de una supernova en el firmamento (lado izquierdo de la imagen). Esta supernova corresponde a la supernova del año 1054 que fue observada también por los Chinos y tribus del norte de México y sur de los Estados Unidos de América. El remanente de supernova se denomina hoy en día como la nebulosa del cangrejo (cf. Figura V.2). La imagen fue amablemente proporcionada por Jesus Galindo del Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México.

La "esfera" de gas producida por una explosión supernova y que se aleja del punto donde ocurrió la explosión se denomina *remanente de supernova*. La velocidad típica a la cual esta esfera de gas se mueve es $\sim 10^4$ km/s. Esta esfera de gas interacciona con el viento estelar que fue lanzado por la estrella a mucha menor velocidad antes de la explosión. Además de interaccionar con el viento estelar, existe la posibilidad de que el material lanzado por la supernova interaccione también con cualquier otra forma de gas que exista en el medio interestelar que rodeaba a la estrella original. Debido a que el material lanzado a raíz de la explosión se mueve de forma supersónica, entonces se produce una onda de choque[†] la cual acelera el material (viento y gas interestelar) al pasar sobre el. El

[†]Una onda de choque es una discontinuidad hidrodinámica (las variables hidrodinámicas –presión,

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

material por detrás de la onda de choque incrementa su temperatura de tal manera que es capaz de emitir radiación electromagnética. La Figura V.2 muestra el remanente de la supernova del año 1054 D.C., mejor conocido como la nebulosa del cangrejo.

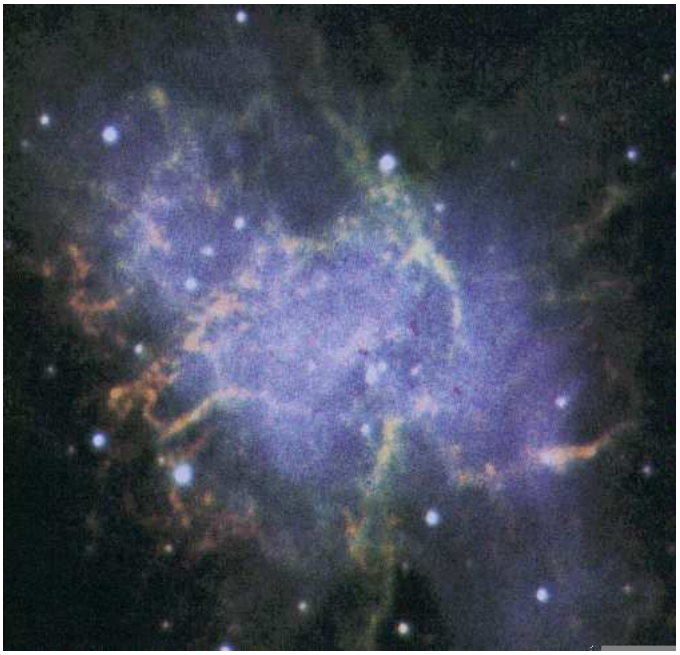

Figura V.2: Observación reciente en radio de la nebulosa del cangrejo (supernova del año 1054 D.C. (cf. Figura V.1), tomada con el telescopio Ryle del Mullard Radio Astronomy Observatory (MRAO) en la Universidad de Cambridge, Reino Unido. La imagen fue obtenida de `http://www.mrao.cam.ac.uk`.

Detrás de la onda de choque se alcanzan temperaturas $T \sim 10^7\,K$ durante los primeros 1000 años. Ahora bien, ya que para cualquier proceso radiativo importante se tiene que $h\nu \approx k_B T$, en donde h es la constante de Planck, ν la frecuencia de la onda electromagnética radiada y k_B es la constante de Boltzman, se sigue que los remanentes de supernovas son brillantes en rayos–X en sus primeras etapas.

Justo después de la explosión, el remanente se expande aproximadamente con velocidad constante (expansión libre) y por lo tanto $r \propto t$, donde r es la coordenada radial y t el tiempo medido a partir del momento de la explosión. Esto sucede hasta que la masa que el

temperatura, velocidad, etc.– tienen un brinco o discontinuidad al pasar a través de una superficie, la onda de choque) que se produce por diversos mecanismos.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

remanente ha barrido M_{barr} es igual a la masa que se lanzó como producto de la explosión M_{lanz}

$$M_{barr} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{ext} = M_{lanz}, \tag{32.1}$$

en donde ρ_{ext} representa la densidad del medio ambiente que originalmente envolvía a la estrella antes de la supernova. Después de esto, la onda de choque entra en lo que se conoce como la fase de *Sedov–Taylor* (o fase adiabática) en la que la evolución del remanente se comporta de manera auto–similar[†]. Para entender el comportamiento de esta fase, introduzcamos el concepto de *presión de empuje* (presión ram). Esta presión es la presión generada por el movimiento macroscópico de las partículas de fluido que se ejerce sobre un área dada. Considera un chorro de gas cilíndrico (un *jet*) que se mueve con velocidad no–relativista v sobre un medio en reposo. Un pequeño volumen de gas en el jet en un tiempo Δt está dado por $v\Delta t \times \Delta a$, en donde la altura del cilindro está dada por $v\Delta t$ y el área de su base es Δa. El momento mv que carga la masa de gas contenida dentro de este pequeño cilindro está dado por $\rho \times v\Delta t\Delta a \times v$, donde ρ es la densidad de masa del gas dentro del cilindro. Como la presión es momento por unidad de tiempo (i.e. la fuerza) por unidad de área entonces la presión de empuje p_{ram} que ejerce el jet al expandirse sobre el medio que le rodea está dada por

$$p_{ram} = \rho v^2. \tag{32.2}$$

Para calcular la presión de empuje en el caso del remanente de supernova, representemos a la presión externa al remanente (viento de la estrella más gas interestelar) por ρ_{ext} y a la velocidad del frente del remanente (onda de choque) con respecto al gas externo por v. Si ahora escogemos un sistema de referencia en el que el frente del remanente se encuentra en reposo, entonces el gas exterior penetra al remanente con una velocidad v. Por lo tanto, la presión de empuje que genera este gas sobre el remanente es $\rho_{ext} v^2 = \rho_{ext} \dot{r}^2$ con r la distancia radial al origen. Por la ley de Newton, esta presión debe debe ser del orden (salvo algunas constantes) de la energía total de la explosión E dividida por el volumen de

[†]Se dice que un proceso en la hidrodinámica se lleva a cabo de manera auto–similar si $r \propto t^\alpha$, donde el índice de similaridad α es una constante. Físicamente esto quiere decir que si escalamos a la distancia de tal manera que esta se incremente con el tiempo como t^α entonces los valores de las cantidades hidrodinámicas permanecen constantes.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

la esfera que envuelve al frente del remanente $\sim 1/r^3$. De aquí que

$$r \propto \left(\frac{E}{\rho_{ext}}\right)^{1/5} t^{2/5}. \tag{32.3}$$

Esta solución es auto–similar. De hecho esta solución fue originalmente encontrada para el caso en el que una explosión fuerte (como una bomba nuclear) ocurriese, y describe bastante bien el comportamiento de una explosión de este tipo.

Tarea 10

Una onda de choque es una discontinuidad hidrodinámica. Dicho de otro modo, las variables hidrodinámicas (presión, temperatura, entropía, velocidad, etc.) varían de manera discontinua al cruzar esta superficie de discontinuidad que siempre puede suponerse como infinitamente delgada (para facilitar cálculos matemáticos). Si se supone que la onda de choque es estacionaria, i.e. $\partial/\partial t = 0$*, entonces es claro que en el marco de referencia de la onda de choque, el flujo de masa* ρv*, el flujo de momento* $\rho v^2 + p$ *y el flujo de energía* $\rho v(v^2/2 + w)$ *deben variar de manera continua a través de la onda de choque*[†]*. De esta manera, si el subíndice 1 y 2 representan cada uno de los lados de la onda de choque entonces*

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \tag{32.4}$$

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2 \tag{32.5}$$

$$\rho_1 v_1 \left(\frac{1}{2} v_1^2 + w_1\right) = \rho_2 v_2 \left(\frac{1}{2} v_2^2 + w_1\right) \tag{32.6}$$

Una onda de choque produce una compresión, es decir, cuando el gas del lado 1 *pasa al*

[†]Para mostrar esto en el caso del flujo de masa, basta con tomar la ecuación de continuidad (22.2) e integrarla sobre un volumen pequeño V que atraviesa la superficie de discontinuidad. Debido a que $\partial/\partial t = 0$ entonces

$$\int \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v})\, dV = \oint \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = 0,$$

donde $\boldsymbol{a}$ es el elemento de área normal al volumen de integración. Haciendo tender a cero las dimensiones del volumen, la integral se reduce a $(\rho \boldsymbol{v})_1 = (\rho \boldsymbol{v})_2$, en donde los subíndices 1 y 2 representan cada uno de los lados de la discontinuidad. Esto mismo se puede hacer para el caso de las ecuaciones de conservación de momento y energía para un fluido y lo que se obtiene es que los flujos respectivos de momento y energía deben ser conservados a través de la onda de choque.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

lado 2 se obtiene que $p_2 > p_1$. *De aquí y utilizando las ecuaciones* (32.4)-*eq.5.99.3 se pude mostrar que* $v_1 > v_2$. *Además, el flujo pasa de un estado supersónico en el lado* 1 *a uno subsónico en el lado 2. Se dice que una onda de choque es fuerte cuando* $p_2 \gg p_1$. *Esto sucede en el caso de explosiones supernova o explosiones nucleares por ejemplo.*

(I) *Utilizando el hecho de que la entalpía específica para un gas politrópico está dada por la relación (cf. ecuación* (26.30)*)* $w = \kappa p/(\kappa - 1)\rho$, *muestra que en el caso de una onda de choque fuerte, las ecuaciones* (32.4)-(32.6) *implican que*

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}. \tag{32.7}$$

Muestra también, utilizando la ecuación de estado del gas ideal (26.17), *que la discontinuidad en las temperaturas para este tipo de onda de choque está dada por*

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\kappa - 1)\, p_2}{(\kappa + 1)\, p_1}. \tag{32.8}$$

(II) *Muestra utilizando el inciso anterior (o de cualquier otra manera) que una onda de choque fuerte cumple con la relación de que* $M_1 := v_1/c_1 \gg M_2 := v_2/c_2$, *en donde la velocidad del sonido del gas* $c = (\partial p/\partial \rho)_s^{1/2} = \kappa p/\rho$. *Además muestra que la presión del lado 2 (presión post–choque) está dada por*

$$p_2 = \rho_1 v_1^2, \tag{32.9}$$

es decir, coincide con la presión de empuje (cf. ecuación (32.2)*).*

En el caso de una onda de choque producida por una supernova se tiene que los puntos geométricos $r(t)$ *de la onda de choque esférica que se expande sobre el medio interestelar están determinados por la ley de Newton*

$$\frac{d}{dt}\,(M_{cap} v_2) = 4\pi r^2 p_{eff}. \tag{32.10}$$

En esta ecuación v_2 *es la velocidad post–choque medida desde el marco de referencia de la onda de choque. La presión* p_{eff} *es la presión que genera el gas postchoque detrás de la onda de choque de tal manera que la ecuación* (32.10) *es válida. Dentro de la esfera*

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

formada por la onda de choque se encuentra material de la explosión más el gas barrido por la onda de choque. La masa M_{cap} *de esta esfera está dada por* $M_{cap} = (4\pi/3)r^3\rho_2$, *en donde* ρ_2 *es la densidad detrás de la onda de choque. Desde el marco de referencia del gas, lejos de la explosión, la velocidad con que viaja la onda de choque es* $v_s = \dot{r}$.

(III) *Suponiendo que* $p_{eff} = \alpha p_2$, *con* α *una constante de proporcionalidad y usando el hecho de que* $v = \dot{r}$, *muestra que la ecuación* (32.10) *puede escribirse como*

$$\dot{r} = Ar^{3(\alpha-1)}. \tag{32.11}$$

¿Qué valor tiene la constante A*?*

La energía cinética de la capa de gas detrás de la onda de choque está dada por

$$E_k = \frac{1}{2}M_{cap}v_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}r^3\rho_1\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)\dot{r}^2, \tag{32.12}$$

y la energía interna U *está dada por*

$$U = \frac{p_{eff} \times \textit{Volumen}}{\kappa-1} = \frac{4\pi}{3}r^3\frac{\alpha p_2}{\kappa-1}. \tag{32.13}$$

(IV) *Usando el hecho de que la energía total* E *es*

$$E = \textit{ const } = E_k + U, \tag{32.14}$$

demuestra que la constante A *está relacionada a la energía total* E *mediante*

$$A^2 = \frac{3(\kappa-1)E}{4\pi(\kappa+1)\rho_1} \tag{32.15}$$

y que los puntos geométricos $r(t)$ *del choque evolucionan en el tiempo como*

$$r = \zeta\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/5}t^{2/5}, \tag{32.16}$$

donde ζ *es una constante. Compara este resultado con el sencillo análisis dimensional hecho para obtener la ecuación* (32.3).

Los remanentes de supernova son capaces de energetizar al medio interestelar con me-

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

tales mediante la expansión de la onda de choque a partir del punto explosivo. Como ya mencionamos antes, la gran mayoría de los elementos formados en la tierra fueron creados en explosiones supernova y lanzados al espacio interestelar por algún remanente de supernova en el pasado.

§33. Pulsares

Las estrellas de neutrones se enfrían rápidamente después de su formación debido a la elevada emisión de neutrinos. Este enfriamiento se lleva acabo a partir del núcleo hacia afuera. La temperatura del núcleo desciende a valores $\lesssim 10^{11}$ K en $\sim 10^3$ años y la temperatura de la superficie alcanza valores $\sim 10^6$ K. El radio de estos objetos es tan pequeño que la luminosidad emitida es demasiado pequeña como para ser detectada en la tierra. Esta emisión es predominantemente en el extremo ultra violeta (EUV) y es absorbida mediante absorción fotoeléctrica por el hidrógeno que se encuentra en el plano de la galaxia. Por esta razón el flujo observado en la tierra es excesivamente pequeño. A la fecha no existe una clara evidencia de radiación térmica (cuerpo negro) proveniente de una estrella de neutrones.

Los modelos de estrellas de neutrones fueron realizados primeramente por el Soviético Landau y el norte–americano Zwicky en la década de los años 1930's. Sin embargo, no fue sino hasta la década de los 1960's que gracias a los satélites de rayos–X cuando se identificaron a ciertas fuentes como estrellas de neutrones. De hecho, Zwicky y Bade predijeron que en el remanente de supernova de la nebulosa del cangrejo debería encontrarse una estrella de neutrones en su interior.

Las estrellas de neutrones fueron descubiertas de manera indirecta por Bell y Hewish del Laboratorio Cavendish de la Universidad de Cambridge. Al construir un detector en radio para captar centelleos veloces en diversas emisiones en radio provenientes del cielo, se dieron cuenta que existían algunas fuentes pequeñas que emitían radiación en radio de manera periódica. Esta periodicidad es del orden de 1 s y posee una precisión extraordinaria. Estos objetos fueron inmediatamente nombrados *pulsares*. Los pulsares conocidos tienen periodos P en el intervalo $1.6\,\mu\text{s} \lesssim \text{P} \lesssim 5\,\text{s}$. Este periodo se incrementa lentamente como función del tiempo y en ocasiones tiene fluctuaciones muy pequeñas (llamados "glitches" que se deben a temblores internos en la estructura de la estrella). Debido a la gran

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

precisión de su periodo, los pulsares resultan ser relojes excelentes[†].

La manera en la que Bell y Hewish identificaron a los pulsares como estrellas de neutrones fue la siguiente. Ellos imaginaron a un objeto compacto (digamos una estrella) que rotaba. Entonces utilizando el hecho de que para que una estrella pueda rotar necesariamente se tiene que la aceleración centrífuga ($\Omega^2 R$), con Ω la velocidad angular, debe ser $\lesssim$ que la aceleración de atracción gravitacional (GM/R^2) y por lo tanto

$$\Omega^2 \lesssim \frac{GM}{R^3} \sim G\rho. \tag{33.1}$$

De aquí que para objetos con periodos $P < 1\,s$ se obtenga que $\rho \sim 10^{10}\,kg\,m^{-3}$ y así el objeto queda identificado como una estrella de neutrones en rotación.

El modelo más preciso que se tiene de un pulsar fue descrito por Gold y se refiere a que un pulsar es una estrella de neutrones magnetizada en rotación. Para esto se considera una estrella que gira con una frecuencia angular Ω y que tiene un momento bipolar magnético p_m y un campo magnético B_p sobre el eje del dipolo como muestra la Figura V.3. El eje del dipolo magnético hace un ángulo α con respecto al eje de rotación. De esta manera, la perdida de energía de rotación (la potencia) $-dE_{rot}/dt := P$ puede calcularse de la siguiente manera. Debido a que el campo magnético está amarrado con la estrella y por lo tanto gira con la rotación de la misma, entonces existe un radio máximo R_c hasta el cual la velocidad de corrotación de una partícula alcanza la velocidad de la luz. Este radio es claramente $R_c = c/\Omega$. Si suponemos que el campo hasta esta posición está determinado por un dipolo, entonces debido a que el momento bipolar magnético p_m está dado por

$$p_m = \frac{2\pi}{\mu_0} B_p R^3, \tag{33.2}$$

para un dipolo magnético, entonces $B_c \approx B_p(R/R_c)^3$. Por otra parte, la densidad de energía magnética tiene el valor B^2/μ_0 y así se obtiene

[†]De hecho los pulsares resultan ser los mejores laboratorios para poner a prueba la teoría relativista de la gravitación propuesta por Einstein. Esto debido a que para hacer experimentos en la teoría de la relatividad general se requiere un buen reloj (pulsar) dentro de un campo gravitacional fuerte (producido por el mismo pulsar).

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$P \sim \frac{\text{Energía}}{\text{tiempo}} = \text{Densidad de energía } \times \text{Volumen } \times \text{frecuencia} \sim \frac{B_p^2 R^6 \Omega^4}{\mu_0 c^3}. \tag{33.3}$$

Tarea 11

En el caso de un dipolo magnético la potencia P *está dada por la fórmula de Larmour*

$$P = \frac{\mu_0}{6c^3} |\ddot{\mathbf{p}}_m|^2, \tag{33.4}$$

en donde $\mathbf{p}_m$ *es el momento bipolar magnético cuya magnitud está dado por la ecuación* (33.2)*. En el caso de un pulsar, como lo muestra la Figura* V.3*, se obtiene que* $\mathbf{p}_m = \mathbf{p}_{m_0} \Omega^2 \sin\alpha$ *con* $\mathbf{p}_{m_0} = p_{m_0} \boldsymbol{e}_z$*. Además, en el caso de un dipolo magnético, la intensidad del campo magnético* $\mathbf{B}$ *está dada por*

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 p_{m_0}}{4\pi r^3} \{2\cos\theta \boldsymbol{e}_r + \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta\}. \tag{33.5}$$

(I) *Calcula el valor del campo magnético* B_p *en el polo, i.e. cuando* $\theta = 0$*, y de aquí muestra que la potencia de radiación de un pulsar está dada por*

$$P = -\frac{dE_{rot}}{dt} = \frac{2\pi}{3c^3\mu_0} B_p^2 R^6 \Omega^4 \sin^2\alpha, \tag{33.6}$$

(compara esta ecuación con la igualdad (33.3)*) en donde la* E_{rot} *representa la pérdida de energía por rotación que para el caso de un cuerpo rígido esférico está dada por*

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \Omega^2, \tag{33.7}$$

con I *el momento de inercia del pulsar.*

(II) *Muestra utilizando el inciso anterior, o de alguna otra manera, que debido a que* $P > 0$ *entonces la velocidad de rotación del pulsar disminuye debido a la pérdida de energía rotacional, en completo acuerdo con las observaciones.*

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

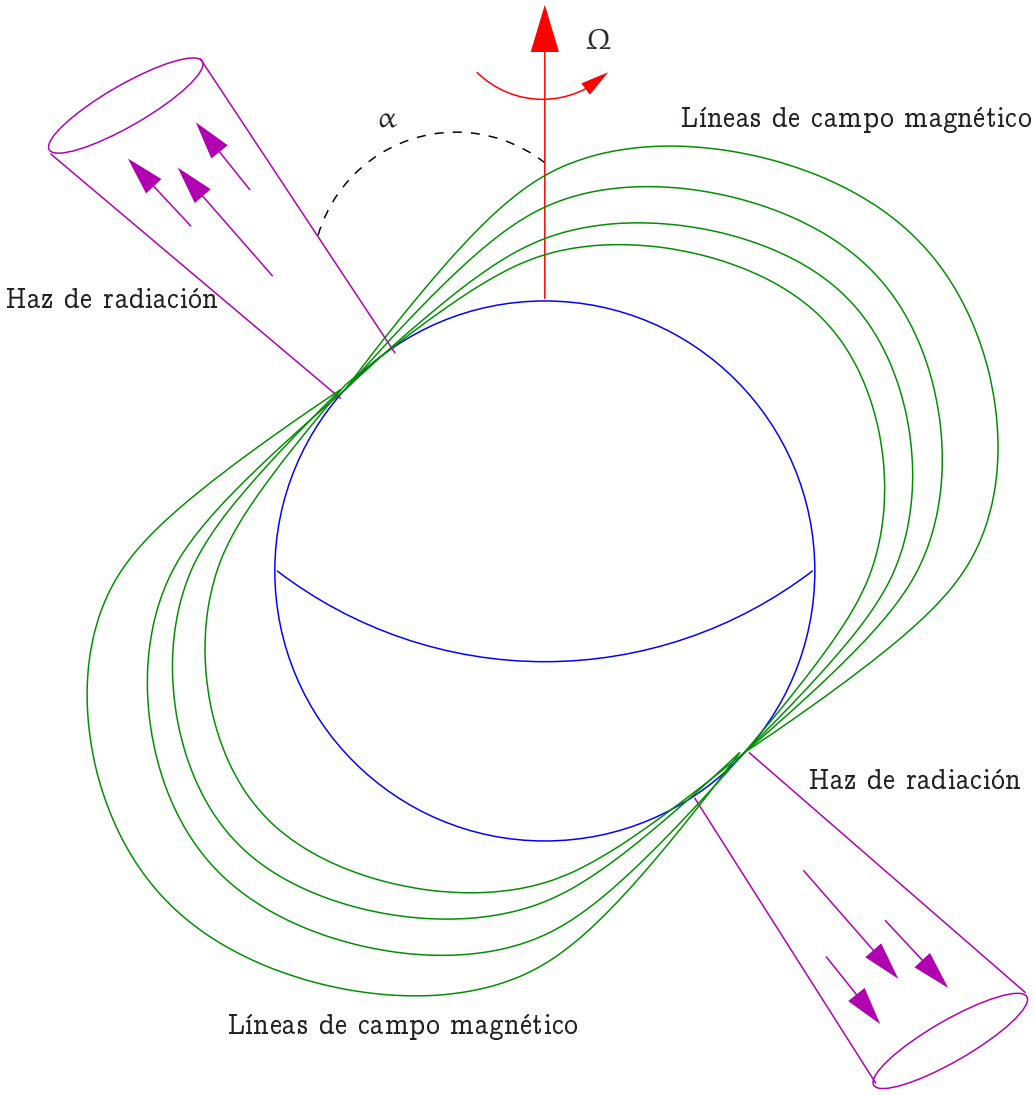

Figura V.3: Modelo de una estrella de neutrones magnetizada en rotación, denominada pulsar. Una estrella de neutrones con radio ~ 10 km gira con velocidad angular Ω alrededor de un eje determinado. Existe un dipolo magnético cuyo eje hace un ángulo α con respecto al eje de rotación. El haz de radiación electromagnética es lanzado sobre el eje del dipolo y por lo tanto, mientras la estrella rota, un observador lejano ve pulsos de radiación con una frecuencia bien establecida.

(III) *El tiempo característico τ que tarda una estrella de neutrones en reducir su periodo*

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

de pulsación está dado por $\tau := -\Omega/\dot{\Omega}$. *Muestra que*

$$\tau = \frac{3Ic^3\mu_0}{2\pi B_p^2 R^6 \sin^2\alpha\Omega^2} \tag{33.8}$$

El modelo del dipolo magnético para una estrella de neutrones puede ser puesto a prueba observacional utilizando el *índice de ruptura* n que está definido mediante la relación $\dot{\Omega} \propto -\Omega^n$, y por lo tanto

$$n = -\frac{\Omega\ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2} = 3. \tag{33.9}$$

En el caso de la nebulosa del cangrejo el valor de este índice es de ~ 2.5.

Únicamente algunos pulsares están asociados con remanentes de supernovas. Las razones son diversas, pero puede deberse a que la supernova sea de tipo I o a que el pulsar tenga movimientos que impidan su observación, o a que en vez de un pulsar se forme un agujero negro o por último a que la radiación pulsante no atraviese a la tierra.

§34. Límite de Eddington

En ciertos fenómenos astrofísicos la radiación producida por flujos de fotones es capaz de balancear a la fuerza gravitacional. El caso más sencillo es el de una estrella soportada únicamente por presión de radiación como vimos en la sección §28. Si se considera que el gas está totalmente ionizado, entonces la presión ejercida por la radiación se deberá a la dispersión de Thomson de la radiación producida por los electrones en el gas ionizado. De cualquier forma, la ventaja de utilizar la sección transversal de Thomson σ_T en el problema es que esta sección de área efectiva es la menor posible. Por lo tanto, la presión que se producirá por un flujo de fotones incidente en electrones (presión es fuerza sobre área) será la máxima posible.

La fuerza F que ejerce el flujo de fotones f (número de fotones por unidad de área por unidad de tiempo) sobre los electrones del plasma está dada por $F = \sigma_T f p$. Aquí, $p = h\nu/c$ es el momento que imparte cada fotón con frecuencia ν al área efectiva de interacción σ_T. El flujo de fotones a una distancia r de la fuente está dado por (cf. ecuación (6.1)) $f = L/4\pi r^2 h\nu$. Por otra parte, la fuerza gravitacional F_g que actúa sobre un par protón–

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

electrón del gas es $F_g = GM\left(m_p + m_e\right)/r^2 \approx GMm_p/r^2$, en donde M es la masa del gas en consideración. La masa del protón y del electrón son respectivamente m_p y m_e. La ventaja de poner a la masa de un protón en la fuerza gravitacional (en vez de la de un electrón) es que proporcionará la máxima fuerza gravitacional disponible. De esta manera, al igualar F_g con F encontraremos el valor máximo que los fotones deben realizar para contener a una masa M.

Con lo anterior y haciendo $F = F_g$ se obtiene la *Luminosidad de Eddington* L_{Edd} que está dada por

$$L_{Edd} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} \approx 10^{31}\frac{M}{M_\odot}\,W. \tag{34.1}$$

Esta luminosidad representa la luminosidad máxima que un objeto puede tener para que exista un equilibrio entre fuerzas de radiación y fuerzas de gravitación. Si la luminosidad de Eddington es excedida el objeto gravitacional es inestable y tiende a despedazarse. Lo maravilloso de la luminosidad de Eddington es que únicamente depende de la masa del objeto. Por esta razón y utilizando la relación de masa–luminosidad, descrita en la sección §28, es posible obtener una cota superior para la masa de una estrella de $\sim 100M_\odot$ como se mencionó en la sección §29.

§35. Transferencia de masa

Como ya hemos mencionado, alrededor del 70 % de las estrellas en la galaxia se encuentran en sistemas binarios. Para facilitar las observaciones se define la *inclinación de la órbita* como el ángulo i tal que si la órbita de un objeto se encuentra contenida en el plano del cielo, entonces $i = 0$. En cualquier otro caso $i \neq 0$.

Dos estrellas de masas m_1 y m_2 orbitan alrededor del centro de masa del sistema. Medido en algún sistema de referencia el centro de masa $\mathbf{r}_{cm}$ está dado por $\mathbf{r}_{cm} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$. Los radio vectores de las masas m_1 y m_2 están dados por $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Si escogemos al centro de masa como el origen, entonces $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$. Es costumbre definir el radio vector $\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Así $\mathbf{r}_1 = -\mu\mathbf{r}/m_1$ y $\mathbf{r}_2 = \mu\mathbf{r}/m_2$, con $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2$ la *masa reducida* del sistema (cf. sección §6). Además si a_1 y a_2 son los semiejes mayores de las respectivas órbitas del sistema con foco en el centro de masa, entonces

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$a_1 + a_2 = a$. Aquí a representa el semieje mayor de la elipse producida por el radiovector $\mathbf{r}$. De esta manera, la ley de Kepler para el sistema es

$$G\,(m_1 + m_2)\,P^2 = 4\pi^2 a^3, \tag{35.1}$$

en donde P es el periodo de la órbita. Supongamos que las velocidades orbitales $K_1 := v_1 \cos i$ y $K_2 := v_2 \cos i$ de ambas masas pueden ser medidas, ya sea por efecto Doppler, cambios espectrales o pulsación del periodo de la órbita (en el caso de un pulsar). En el caso de que $i = 0$ entonces, como el momento total con respecto al centro de masa es cero, se obtiene que

$$\frac{v_1 \cos i}{v_2 \cos i} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{m_2}{m_1}.$$

En otras palabras, la razón de masa m_2/m_1 es una cantidad observada. En el caso de que las órbitas sean más o menos circulares y que $i \neq 0$, entonces las velocidades orbitales están dadas por

$$K_1 := \frac{2\pi}{P} a_1 \sin i, \qquad K_2 := \frac{2\pi}{P} a_2 \sin i. \tag{35.2}$$

Utilizando la ecuación (35.1), la ley de Kepler (35.1) implica que los *factor de masa* f_1 y f_2 estén determinados por

$$f_{1,2} := \frac{P K_{1,2}^3}{2\pi G} = \frac{(m_{2,1} \sin i)^3}{(m_1 + m_2)^2}. \tag{35.3}$$

De esta manera, como $f_1/f_2 = (K_1/K_2)^3 = (m_2/m_1)^3$ entonces si se conoce el cociente K_1/K_2 se puede determinar la fracción de masa m_2/m_1.

La *paradoja de Algolparadoja!de Algol* dio lugar al descubrimiento del primer sistema binario donde ocurría transferencia de masa de una estrella a otra. La interpretación fue descrita por Crawford en la década de los 1960's. A principios del siglo XIX J. Goodricke descubrió que la estrella brillante a simple vista Algol (β Per) es eclipsada por su compañera cada 2.9 días. La estrella brillante es una estrella normal que quema hidrógeno en su centro y tiene una masa $\sim 4\,M_\odot$. La estrella eclipsante es una estrella evolucionada subgigante de $\sim 0.8\,M_\odot$. Sin embargo, como se ha mencionado, las estrellas más masivas,

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

evolucionan más rápido que las estrellas menos masivas. Esto se contradice totalmente en este sistema y a esta contradicción se le conoce como la paradoja de Algol. Lo que realmente sucede es que primeramente la estrella más masiva evoluciona y se expande hasta completar su etapa de quemado de hidrógeno. Durante esta etapa, la compañera menos masiva captura gravitacionalmente a la envolvente de la estrella masiva. Así, la fracción de masa del sistema se invierte. Dicho de otro modo, la estrella menos masiva al capturar masa de la compañera aumenta su masa y la estrella que originalmente tenía menos masa, disminuye considerablemente la misma.

Consideremos un sistema binario que órbita alrededor de su centro de masa. Si tomamos un sistema de referencia que rota con el sistema binario de tal manera que el origen coincida con el centro de masa del sistema, entonces el potencial está dado por

$$\phi = -G\frac{m_1}{r_1} - G\frac{m_2}{r_2} + \Omega^2 r^2, \tag{35.4}$$

en donde Ω representa la velocidad de rotación del sistema medido desde las estrellas fijas. El potencial centrífugo está dado por $\Omega^2 r^2$. Las superficies equipotenciales están graficadas en la Figura V.4. La superficie de una estrella en este diagrama corresponde también a alguna superficie equipotencial. De tal manera que cuando una de las estrellas (la más masiva) evoluciona, entonces llega un momento en que su superficie se expande tanto que comparte líneas equipotenciales con la otra estrella. De esta manera la estrella que evolucionó primero lanza su masa hacia la segunda a través del punto de Lagrange L_1. Este proceso de transferencia de masa de una estrella a la otra se denomina *flujo del lóbulo de Roche*. Existe también la posibilidad de capturar masa de una estrella si una de las estrellas posee un viento estelar fuerte que es capturado por la compañera.

La transferencia de masa se lleva acabo generalmente de la estrella más masiva a la estrella menos masiva. Cuando esto sucede, la transferencia continúa rápidamente hasta que las masas se igualan y la transferencia se vuelve más lenta. Como muestran las simulaciones numéricas, los detalles de esta transferencia dependen de cómo varía el radio de la estrella al perder su masa. La perdida y transferencia de masa en un sistema binario puede cambiar el periodo orbital de valores tan pequeños como de 100 días hasta valores de unas cuantas horas.

Cuando una de las estrellas en un sistema binario evoluciona para convertirse en una

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

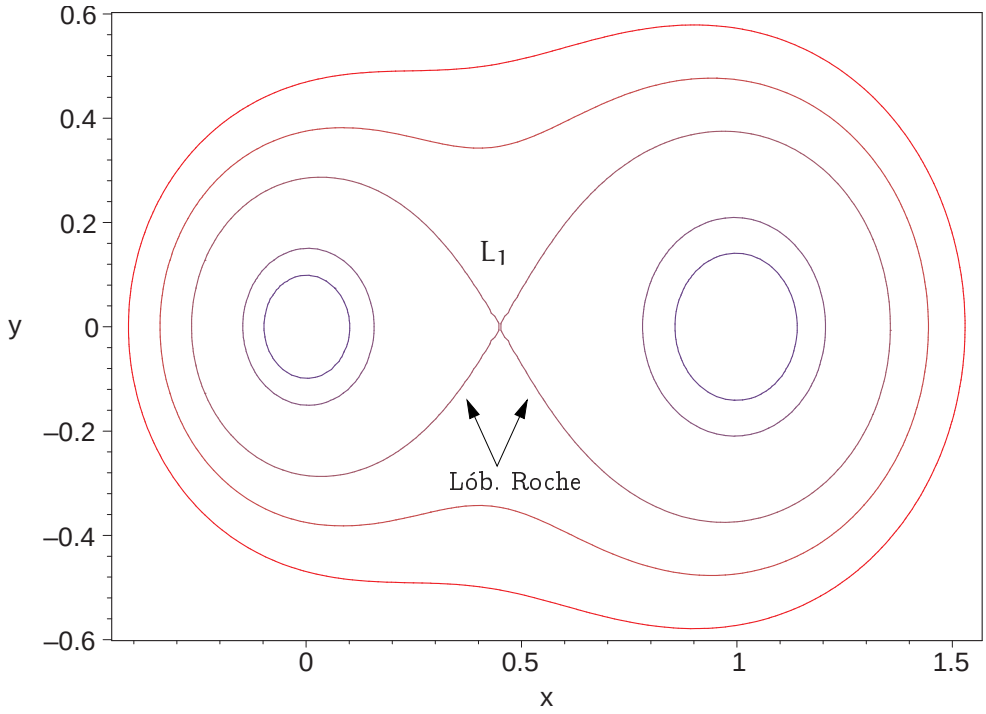

Figura V.4: La figura muestra algunas superficies (líneas) equipotenciales de un sistema binario en corrotación. Se ha supuesto que la masa de la estrella que se encuentra en el origen es de $1M_\odot$. En la posición $x = 1\,\mathrm{AU}$ se encuentra otra estrella de masa $1.5M_\odot$. La velocidad angular de rotación del sistema es $1\,\text{año}^{-1}$. Las distancias en la gráfica están medidas en unidades astronómicas. El punto donde la curva cerrada intersecta al eje x es el punto interno de Lagrange L1. A esta curva cerrada se le denomina el lóbulo de Roche.

enana blanca su periodo orbital es de unas cuantas horas y el semieje mayor es menor al radio del sol. En este caso la transferencia de masa es tan grande que el sistema genera una *variable cataclísmica*. Cuando estas estrellas varían su luminosidad óptica por factores de ~ 100 en unas cuantas semanas se denominan *enanas nova*.

En ciertas circunstancias, la masa que se acreta a una de las estrellas es rica en hidrógeno. Debido al calentamiento generado por la acreción, es posible que el hidrógeno se queme de manera explosiva. Esto genera un brillo fuerte (explosivo) y es observado en la tierra como una *nova*. En el caso en que la masa expulsada por las explosiones nova sea menor a la masa acretada, la enana blanca puede alcanzar el límite de Chandrasekhar y generar una explosión supernova de tipo I. La energía termonuclear extraída por esta explosión es

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

suficiente para llevar a infinito todo el material de la estrella y por lo tanto no se produce un remanente compacto.

Cuando el objeto compacto resulta ser una estrella de neutrones, entonces la acreción genera emisión de rayos–X. En efecto, la luminosidad L_{grav} producida por la liberación de energía gravitacional de la estrella en este caso está dada por

$$L_{grav} = \frac{GM\dot{M}}{R} = 4\pi R^2 \sigma T_{sup}^4, \tag{35.5}$$

en donde $\dot{M}$ es la *taza de acreción* (cantidad de masa por unidad de tiempo debida a la acreción hacia una estrella). La temperatura de la superficie de la estrella está representada por T_{sup} y el último paso en la ecuación (35.5) se debe a la ley de Boltzman (por unidad de tiempo) para un cuerpo negro. En el caso de acreción hacia estrellas de neutrones centrales la taza de acreción $\dot{M}$ es tan grande que llega a rebasar valores de luminosidad solar $L_\odot$. Con esto se generan temperaturas del orden de 10^6 K que corresponde al rango de rayos–X. Estos objetos se denominan *binarias de rayos–X*. Cuando el objeto compacto es un agujero negro es posible producir también rayos–X. Las estrellas binarias de rayos–X están clasificadas en dos conjuntos. El primer grupo sucede cuando la compañera tiene masas $\gtrsim 10\,M_\odot$. En este caso el sistema se denomina *HMXB* (High mass X-ray Binary). El segundo grupo corresponde a estrellas binarias de masas $\lesssim 10\,M_\odot$ que se denomina *LMXB* (Low mass X-ray Binary).

Para que se produzca una binaria de rayos–X se requiere que una explosión supernova en un sistema binario haya ocurrido. La explosión supernova debe haber ocurrido por la estrella de menos masa en el sistema cuando acretó su masa por medio de transferencia de masa. En el caso en que sea la estrella más masiva la que explote, lo que se obtiene es una estrella que se aleja de la órbita y un pulsar con velocidad elevada orbitando en esta misma.

§36. Acreción

El proceso de acreción ocurre cuando gas o materia cae hacia un objeto gravitacional compacto y se acumula sobre el mismo. Esto sucede esencialmente sobre cualquier objeto gravitacional. Sin embargo el proceso de acreción es mucho más eficiente cuando el objeto

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

gravitacional central posee una gran energía de amarre ($\propto M^2/R$).

Para entender de manera simple la forma en la cual se extrae energía debida a los procesos de acreción, consideremos el siguiente ejemplo. Supongamos que se tiene acreción de materia hacia una estrella de masa M y radio R. Si la materia cae libremente sobre la superficie de la estrella desde infinito, entonces la energía cinética que adquiere la materia se incrementa a medida que su energía potencial se vuelve más negativa, i.e. cuando la distancia al centro de la estrella disminuye. En el caso de que un protón con masa m_p que cae libremente desde infinito, la energía cinética está dada por

$$\frac{1}{2}m_p v^2 = \frac{GMm_p}{r}, \tag{36.1}$$

en donde r es la coordenada radial medida desde el centro de la estrella y v es la velocidad de caída libre. Cuando el gas que cae alcanza el radio de la estrella $r = R$ entonces es desacelerado violentamente. De esta manera toda la energía cinética tiene que ser radiada en forma de calor, lo cual produce radiación (que llega a ser hasta radiación de rayos–X en el caso de acreción de gas sobre estrellas de neutrones como vimos en la sección §35).

Si la *taza de acreción* (razón de cambio en el tiempo a la cual se acreta masa hacia el objeto central) está dada por $\dot{m}$, entonces la taza de disipación de energía cinética en la superficie de la estrella está dada por $\dot{m}v^2/2$. De esta manera, la luminosidad de la fuente L está dada por

$$L = \frac{1}{2}\dot{m}v^2 = \frac{GM\dot{m}}{R} = \frac{1}{2}\dot{m}c^2\left(\frac{r_S}{R}\right), \tag{36.2}$$

en donde el *radio de Schwarzschild* $r_S := 2GM/c^2$. Como veremos en el próximo capítulo, este radio es una longitud característica que aparece cuando los fenómenos relativistas deben ser incluidos en las descripciones gravitacionales. De hecho, esto es claro utilizando análisis dimensional. En efecto, cuando se consideran fenómenos relativistas en la gravitación para los cuales se tiene una longitud característica –como el radio de una estrella– entonces puede formarse un parámetro adimensional dado por r/r_s el cual debe jugar un papel importante en la descripción de todos los fenómenos físicos (cf. teorema Π de Buckingham del análisis dimensional).

De la ecuación (36.2) se sigue que la luminosidad puede escribirse como

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$L = \xi \dot{m} c^2, \tag{36.3}$$

en donde ξ es el *factor de eficiencia* de conversión de energía en reposo (de la masa acretada hacia la estrella) en calor. Con el simple análisis aquí expuesto se ve que $\xi \approx r_S/2R$. En otras palabras, el factor de conversión de energía es mayor para objetos de menor radio como las estrellas de neutrones. En el caso de enanas blancas $\xi \approx 3 \times 10^{-4}$ y en el caso de estrellas de neutrones $\xi \approx 0.1$. Para dar una idea de lo grande que es este factor de conversión de energía, consideremos el caso de la reacción nuclear p–p en donde se convierte hidrógeno a helio (cf. ecuación (27.6)). En este caso $\xi \approx 7 \times 10^{-3}$. De aquí se ve que el fenómeno de acreción hacia una estrella de neutrones es aproximadamente un orden de magnitud más eficiente en comparación con la generación de energía nuclear. Mas adelante veremos que este factor de conversión de energía de masa en reposo es bastante más grande para el caso de agujeros negros.

La manera en la cual cae gas hacia un objeto gravitacional compacto puede ocurrir de diversas formas. Sin embargo únicamente se conocen tres soluciones analíticas a los problemas de acreción. En la *acreción esférica* o *acreción de Bondi* se considera un objeto gravitacional compacto en reposo sumergido dentro de un gas de extensión infinita y con temperatura T. En la *acreción de línea* un cuerpo gravitacional compacto se mueve con velocidad v a través de un gas de temperatura despreciable. Por último, la *acreción de disco* ocurre sobre un plano debido a que el gas posee un momento angular inicial considerable. En todos los casos, el movimiento térmico o dinámico del gas es quién provee la acreción.

Tarea 12

Considera un objeto condensado (como una estrella o un agujero negro) que se encuentra inmerso dentro de una nube de gas mucho más grande que el objeto condensado. De esta manera, el objeto "central" puede aproximarse mediante un punto, que por comodidad pondremos en el origen de coordenadas. Supongamos que la gravedad propia del gas es despreciable en comparación con la gravedad que ejerce el objeto central sobre cualquier partícula de fluido en la nube. Por lo tanto, la dinámica de las partículas de fluido en la

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

nube de gas está determinada por las condiciones iniciales y de frontera, así como por la fuerza gravitacional producida por el objeto central.

1. *Suponiendo que el gas en la nube ha alcanzado un estado estacionario* $(\partial/\partial t = 0)$ *y que este mismo obedece una relación politrópica, muestra utilizando las ecuaciones no–relativistas de continuidad y de Euler que la velocidad* $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_r$, *donde* r *es la coordenada radial, obedece la siguiente ecuación*

$$\frac{1}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dv}{dr} = -\frac{2}{r} + \frac{GM_\star}{r^2c^2}. \tag{36.4}$$

   Aquí hemos supuesto simetría esférica (pues el flujo ha alcanzado un estado estacionario) y hemos escrito a la masa del objeto central como $M_\star$. *Este tipo de flujo se denomina* flujo de acreción de Bondi *en honor a su creador y es uno de los problemas más famosos de la astrofísica*[†].

2. *Muestra con ayuda de la ecuación* (36.4), *o de alguna otra manera, que una partícula de fluido alcanza un valor sónico en el punto*

$$r_s = \frac{GM}{2c^2}. \tag{36.5}$$

3. *Define* $M = v/c$ *y* $\xi = r/r_s$. *Muestra entonces que*

   (a) *Si* $M \gg 1$ *y* $\xi \gg 1$ *entonces* $M^2 \approx 4/\xi + const.$

   (b) *Si* $M \ll 1$ *y* $\xi \ll 1$ *entonces* $M^2 \approx const \times e^{-4/\xi}$.

   (c) *Si* $M \ll 1$ *y* $\xi \gg 1$ *entonces* $M^2 \approx 4/\xi^4$.

   (d) *Cerca del punto sónico, cuando* $M = 1-\epsilon$ *y* $\xi = 1-\delta$ *(*ϵ *y* δ *cantidades pequeñas) muestra que* $dM/d\xi = \pm 2$.

   (e) *Con todo esto, haz una gráfica de* M *vs.* ξ, *donde muestres las regiones sónicas, subsónicas y supersónicas. Muestra como varía la velocidad dentro de este diagrama.*

[†]Para distancias suficientemente alejadas del objeto central, la ecuación (36.4) es válida incluso cuando el objeto central es un agujero negro o una estrella de neutrones. Esto porque la métrica del espacio–tiempo generada por estos objetos resulta converger a la métrica Newtoniana para distancias suficientemente alejadas de los objetos que producen los campos gravitacionales.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

4. *Utilizando el teorema de Bernoulli, o de cualquier otra manera, muestra que la velocidad del sonido* $c(r_s)$ *evaluada en el punto sónico está dada por*

$$c(r_s) = \left\{\frac{2}{5-3\kappa}\right\}^{1/2} c_\infty, \tag{36.6}$$

en donde c_∞ *es el valor de la velocidad del sonido en* $r = \infty$.

5. *La* taza de acreción $\dot{M}$ *se define como la cantidad de masa por unidad de tiempo que cae al objeto central de masa* $M_\star$. *Muestra utilizando la ecuación de continuidad o de alguna otra manera, que*

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v = const. \tag{36.7}$$

De aquí muestra, después que hayas mostrado la igualdad $\rho^{\kappa-1}(r_s)c_\infty^2 = \rho_\infty^{\kappa-1}c^2(r_s)$, *que para el flujo de acreción de Bondi (o acreción esférica) la taza de acreción está dada por*

$$\dot{M} = \frac{\pi G M_\star^2 \rho_\infty}{c_\infty^{3/2}} \left\{\frac{2}{5-3\kappa}\right\}^{(5-3\kappa)/(2(\kappa-1))}, \tag{36.8}$$

donde ρ_∞ *es el valor de la la densidad evaluado lejos del objeto central.*

Cuando el gas en la nube infinita de gas –la cual proporciona la acreción de Bondi– posee una pequeña rotación, entonces las líneas de corriente que caen hacia el objeto central resultan no ser líneas radiales. De hecho cuando la nube gira como un cuerpo rígido alrededor de un eje que pasa por el centro de la estrella, la acreción se lleva acabo más o menos en trayectorias parabólicas. El foco de la parábola es la estrella y por lo tanto, las líneas de corriente no terminan en la superficie de la estrella como sucede en el caso de la acreción esférica (la única excepción es la línea de corriente que está en el eje de rotación pues cualquier partícula de fluido en esta región carece de momento angular). En el plano ortogonal al eje de rotación y que intersecta al centro de la estrella, las líneas de corriente provenientes de "arriba" y "abajo" de este plano colisionan con su contraparte simétrica que viene del otro lado del plano. Las mejores simulaciones numéricas de este fenómeno muestran que la componente ortogonal de la velocidad a este plano se anule después de la interacción mediante la generación de una onda de choque producida por la colisión. En otras palabras, la energía cinética de las partículas en la dirección ortogonal al plano

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

se termaliza (se convierte en energía térmica) y se pierde más tarde mediante radiación. Con esto, las partículas de fluido únicamente tienen componentes de velocidad dentro del plano. Debido a que el momento angular de cada partícula debe conservarse a lo largo de su trayectoria, entonces las partículas de fluido que ahora limitan su movimiento al plano deben girar alrededor del eje de rotación. De esta manera se espera que un disco de gas que gira alrededor del eje de rotación de la nube se produzca (cf. Figura V.5).

Las partículas de gas que giran en un plano, alrededor del objeto central tienden a hacerlo en un disco de gas debido a la simetría del problema. A este objeto gaseoso y masivo que es autogravitante se le denomina *disco de acreción*. El gas gira alrededor del objeto central de tal forma que comienza a acretarse (caer) hacia el objeto central. Esto sucede debido a que una viscosidad genera fricción entre las partículas a diversos radios. De esta manera, se transporta momento angular a las partes más lejanas del disco a expensas de que las partículas sean acretadas hacia el centro del disco, donde se encuentra el objeto central.

Formalmente, consideremos un disco de gas de tal manera que el gas tenga un momento angular significante. Debido a que las partículas que se encuentran girando en distintos radios poseen velocidades diferentes, se genera fricción o viscosidad entre las mismas. Si suponemos que la dinámica del gas ha alcanzado un estado estacionario ($\partial/\partial t = 0$) entonces la masa de gas formará una circunferencia o disco. Supongamos que la masa del disco $M_{\rm disc}$ es mucho menor que la masa del objeto central (estrella) M. Si el disco se encuentra sobre el plano xy entonces la condición de balance hidrostático en la componente z está dada por (cf. ecuación (24.1))

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -G\frac{M\rho\cos\theta}{r^2}, \tag{36.9}$$

en donde el ángulo θ es el ángulo polar y r la coordenada radial. Debido a que $\cos\theta \approx z/r$ y como $\partial p/\partial z \approx p/Z$, en donde Z es aproximadamente la altura del del disco, entonces la condición de la ecuación (36.9) toma la forma

$$\frac{p}{Z} = -G\frac{M\rho\sin\theta}{r^2}. \tag{36.10}$$

El gas que gira en el disco, órbita rápidamente y tiene una componente radial hacia el objeto condensado muy pequeña. Por esta razón es válido pensar que cada partícula de

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

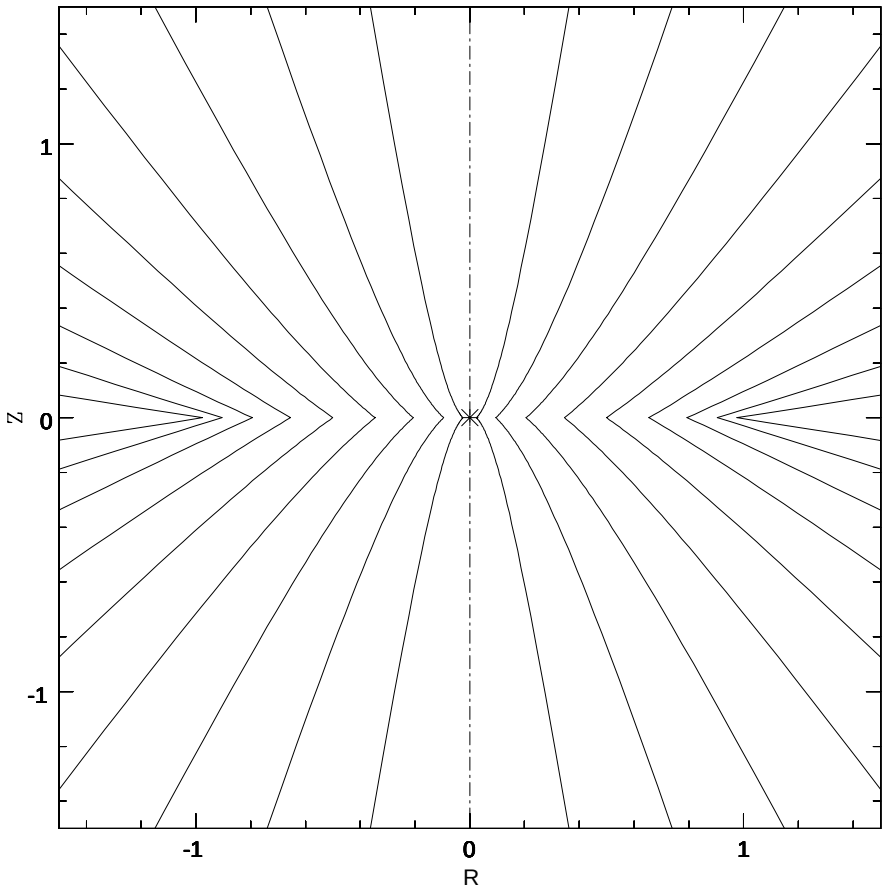

Figura V.5: Lineas de corriente producidas por la atracción gravitacional hacia un objeto central condensado que se encuentra en el origen de coordenadas. El gas que rodea a la nube es considerado infinitamente extenso y posee un momento angular específico (momento angular por unidad de masa) alrededor del eje z dado por $\Gamma_\infty \ll 1$. El plano mostrado en la figura corresponde a un ángulo azimutal $\varphi = \text{const}$. Cada línea de corriente colisiona con su contraparte simétrica en el plano xy. Esto produce una termalización de la componente de velocidad en dirección ortogonal al plano y por lo tanto las partículas de fluido se quedan rotando (por conservación de momento angular) alrededor del eje z en un disco de acreción. En la figura, las distancias están medidas en unidades del radio del disco. De esta manera, la proyección del disco en el plano $\varphi = \text{const}$ corresponde a la línea que va de -1 a $+1$ en el eje horizontal. En la figura $R^2 = x^2 + y^2$.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

fluido posee una órbita Kepleriana alrededor del objeto central. Por lo tanto, cada partícula de gas se encuentra cercanamente en un equilibrio centrífugo, es decir, $v_\varphi^2/r = GM/r^2$ en donde v_φ es la componente de la velocidad en la dirección azimutal. Con esto, la ecuación (36.10) queda como

$$\frac{Z}{r} \approx \frac{1}{v_\varphi}\sqrt{\frac{p}{\rho}} \approx \frac{c}{v_\varphi} = \frac{1}{M}, \tag{36.11}$$

en donde $c = \sqrt{(\kappa p/\rho)}$ es la velocidad del sonido y $M := v/c \approx v_\varphi/c$ es el *número de Mach* del gas en el disco de acreción. De la ecuación (36.11) se ve que cuando el flujo es altamente supersónico (i.e. $M \gg 1$) entonces el disco es un *disco delgado*. Físicamente esto quiere decir que los gradientes de presión no son lo suficientemente grandes como para que el disco se haga "ancho". Los discos de acreción alrededor de estrellas suelen obedecer las propiedades de discos delgados. Por esta razón en lo que resta de esta sección nos dedicaremos al estudio de discos de acreción delgados.

En el caso de un fluido ideal (i.e. un fluido donde no existe disipación por viscosidad o calor) no–relativista, la ecuación de movimiento del fluido está dada por la ecuación de Euler(22.3). Esta ecuación puede transformarse a una forma de ecuación de conservación con ayuda de la ecuación de continuidad (22.2). En efecto, utilizando las ecuaciones (22.2)-(22.3) se obtiene que $\partial(\rho v_\mu)/\partial t = \rho\partial v_\mu/\partial t + v_\mu\partial\rho/\partial t = -\rho v_\nu \partial v_\mu/\partial x_\nu - \partial p/\partial x_\mu - v_\mu\partial(\rho v_\nu)/\partial x_\nu$ con lo cual

$$\frac{\partial \rho v_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{36.12}$$

en donde $\Pi_{\mu\nu}$ es el *tensor de densidad de flujo de momento* y está dado por[†]

[†]Para entender el significado del tensor $\Pi_{\mu\nu}$ integremos a la ecuación (36.12) sobre un volumen y apliquemos el teorema de la divergencia, obteniendo así

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_\mu \, dV = -\int \frac{\partial \Pi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} dV = -\oint \Pi_{\mu\nu} da_\nu. \tag{36.13}$$

El lado izquierdo de la ecuación (36.13) representa la taza de cambio de la componente μ–ésima del momento contenido dentro del volumen en consideración. Necesariamente el lado derecho de esta ecuación debe ser la cantidad de momento que fluye hacia afuera a través de la superficie frontera por unidad de tiempo. Así, la cantidad $\Pi_{\mu\nu}da_\nu$ es la μ–ésima componente del momento que fluye a través del elemento de superficie $d\mathbf{a}$. Si escribimos $da_\nu = n_\nu da$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en la dirección del elemento de área $d\mathbf{a}$ entonces el vector

$$\Pi_{\mu\nu}n_\nu = p n_\mu + \rho v_\mu v_\nu n_\nu. \tag{36.14}$$

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$\Pi_{\mu\nu} := \rho v_\mu v_\nu + p\delta_{\mu\nu}. \tag{36.15}$$

Otra forma de obtener la ecuación (36.12) es utilizando las componentes espaciales de la ecuación (19.6) y tomar los límites Newtonianos cuando $c \to \infty$ como se muestran en la relación (22.1).

Cuando la viscosidad juega un papel importante en el movimiento de un fluido es necesario modificar el tensor de flujo de momento $\Pi_{\mu\nu}$, dado por la ecuación (36.15), por el tensor $\Pi_{\mu\nu} = p\delta_{\mu\nu} + \rho v_\mu v_\nu - \sigma'_{\mu\nu} = -\sigma_{\mu\nu} + \rho v_\mu v_\nu$, en donde $\sigma_{\mu\nu} = -p\delta_{\mu\nu} + \sigma'_{\mu\nu}$ es el *tensor de esfuerzos* y $\sigma'_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos viscoso. En su forma más general, este tensor está dado por

$$\sigma'_{\mu\nu} = \eta\left(\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{2}{3}\delta_{\mu\nu}\frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda}\right) + \zeta\delta_{\mu\nu}\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu}, \tag{36.16}$$

en donde los coeficientes η y ζ no dependen de la velocidad. En la ecuación (36.16), η y ζ representan el *coeficiente de viscosidad* (o *viscosidad dinámica*) y la segunda viscosidad respectivamente.

Para entender de manera más simple a la viscosidad, consideremos el siguiente ejemplo de flujo unidimensional. Supongamos que se tiene un fluido unidimensional que se mueve en la dirección $\boldsymbol{e}_y$ y por lo tanto su velocidad está dada por $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_y$. Utilizando las ecuaciones (36.15) y (36.16) se tiene que el flujo de momento transmitido en la dirección $\boldsymbol{e}_x$ está dado por

$$\Pi = -\eta\frac{dv}{dx}. \tag{36.17}$$

Consideremos ahora un flujo en dos dimensiones que gira alrededor del eje z con una velocidad angular $\Omega = \dot{\varphi}$, como el gas que gira alrededor de un objeto condensado formando un disco de acreción. En este caso el tensor de esfuerzos viscoso está dado por los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación (36.16), con $\mu, \nu = 1, 2$. Las coordenadas más apropiadas para describir este flujo son coordenadas polares (r, φ), que están relacionadas con las coordenadas cartesianas mediante las relaciones $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. De

representa el flujo de la μ–ésima componente del momento por unidad de área. De esta manera el tensor $\Pi_{\mu\nu}$ representa la μ–ésima componente de la cantidad de momento que fluye por unidad de tiempo, por unidad de área perpendicular al eje x_ν.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

esta manera, debido a que la velocidad $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_\mu dx_\mu/dt$, entonces $v_x = v_r \cos\theta - v_\varphi \sin\varphi$ y $v_y = v_r \sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi$. En el caso de un disco de acreción es claro que se tiene simetría axisimétrica, es decir, todas las cantidades hidrodinámicas se ven iguales para cualquier ángulo φ. Por comodidad elijamos entonces $\varphi = 0$. De aquí se sigue entonces que la componente del tensor de esfuerzo viscoso $\sigma'_{r\varphi} = \sigma'_{\varphi r} = \sigma'_{xy}|_{\varphi=0}$. Esto es debido a que $a_x(\varphi = 0) = a_r$ y $a_y(\varphi = 0) = a_\varphi$ para todo vector $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$. Con todo esto y y utilizando la regla de la cadena, el esfuerzo viscoso $\sigma'_{\varphi r}$ (i.e. la cantidad de momento en la dirección φ por unidad de área por unidad de tiempo transmitida a través de un área ortogonal a $\boldsymbol{e}_r$ debida a las fuerzas viscosas) está dado por

$$\sigma'_{xy}\Big|_{\varphi=0} = \sigma'_{\varphi r} = \eta\left\{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right\}\Big|_{\varphi=0} = \eta\left\{-\frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right\} = \eta r\frac{\partial\Omega}{\partial r}, \tag{36.18}$$

en donde $\Omega := \dot{\varphi}$ es la velocidad angular. En el caso en que $\Omega = \text{const}$, entonces el disco de acreción rota como un cuerpo rígido y por lo tanto no hay transferencia de momento de las partes centrales hacia las partes exteriores del disco.

Consideremos nuevamente un anillo de disco con espesor Z. De esta manera, la torca τ que actúa sobre la sección interna de este anillo localizado a una distancia r está dada por

$$\tau(r) = 2\pi r \times Z \times r \times \eta r\frac{\partial\Omega}{\partial r}. \tag{36.19}$$

La torca $\tau(r + dr)$ que actúa sobre la sección externa del área del anillo que se encuentra a una distancia $r + dr$ es

$$\tau(r + dr) \approx \tau(r) + \frac{\partial\tau(r)}{\partial r}dr. \tag{36.20}$$

Con esto se sigue que la torca neta que actúa sobre el anillo está dada por

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \tau(r + dr) - \tau(r) = 2\pi\eta Z\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)dr, \tag{36.21}$$

en donde $L = \pi\left\{(r + dr)^2 - r^2\right\} \times Z \times \rho v_\varphi \approx 2\pi r^2 Z\rho v_\varphi dr$ es el momento angular del anillo. De aquí que

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right)\right\}, \tag{36.22}$$

en donde $\nu := \eta/\rho$ es la *viscosidad cinemática*. Esta relación es sumamente importante pues implica que la velocidad angular v_φ es una función de la posición r, del tiempo t y de la viscosidad cinemática ν. Dicho de otra forma, la estructura del disco depende fuertemente de la viscosidad. Para tener una idea cualitativa de la viscosidad cinemática, calculemos el *número de Reynolds* $R := L^2/\nu T = VL/\nu$, en donde L, T y V son parámetros característicos del problema cuyas dimensiones son de longitud, tiempo y velocidad respectivamente. Cuando $R \sim 1$ entonces la viscosidad juega un papel importante en la descripción dinámica del fluido. Cuando $R \gg 1$, la viscosidad es despreciable (esto sucede claramente para un flujo altamente supersónico). Cuando $R \geq 10^3$, el flujo es turbulento. Resulta que para el caso de discos de acreción en astrofísica el número de Reynolds $R \sim 10^{12}$. Este resultado implica que el flujo en un disco de acreción es severamente turbulento. Además, la viscosidad ordinaria que pueda estar asociada a deflexiones de partículas cargadas en el plasma no es la causante de la estructura del disco. De hecho, la existencia de turbulencia en el disco genera una *viscosidad turbulenta*! que básicamente tiene todas las funciones de la viscosidad normal pero el transporte de momento se lleva acabo gracias al movimiento de pequeños vórtices en el plasma. Por si esto no fuera suficiente complicación, es excesivamente probable que exista un campo magnético amarrado al disco de acreción y por lo tanto exista entonces una turbulencia magnetohidrodinámica. De hecho, los estudios llevados hasta ahora parecen indicar que en efecto, la viscosidad producida se debe a la inestabilidad rotacional magnetohidrodinámica.

En la década de los 1970's, Sunayev y Shakura se dieron cuenta de todas estas complicaciones que aparecen en los discos de acreción. Para hacer a un lado estos problemas, ellos introdujeron de manera empírica una relación para la viscosidad turbulenta ν que está dada por

$$\nu = \alpha c_s Z, \tag{36.23}$$

en donde c_s es la velocidad del sonido en el plasma y α es una constante de proporcionali-

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

dad[†]. Debido a que los pequeños vórtices turbulentos deben tener dimensiones menores al espesor del disco Z y como las velocidades de rotación de los mismos deben ser menores a la velocidad del sonido, entonces a primera aproximación uno espera que $\alpha \leq 1$.

La ventaja de tener un mecanismo para escribir la viscosidad como en la ecuación (36.23) es que, como veremos en un momento, se pueden encontrar soluciones analíticas para la estructura de los discos de acreción delgados (i.e. cuando $Z \ll R$, con R el radio del disco). Cuando un disco de acreción delgado es descrito mediante un único parámetro α que obedece a la receta (36.23) se dice que el disco es un *disco–α*.

Debido al proceso de acreción existe materia que cae lentamente hacia el objeto central con una velocidad v_r. Si consideramos que la acreción se lleva de manera estacionaria ($\partial/\partial t = 0$) entonces la ecuación de continuidad implica que la *taza de acreción* $\dot{m} := dm/dt$ es una contante. En efecto, consideremos un anillo del disco de acreción cuyo espesor está dado por $dr = v_r dt$. El volumen de este anillo está dado por $dV = dr \times \int dz \times r \int_0^{2\pi} d\varphi$. De aquí que la taza de acreción esté dada por

$$\dot{m} = 2\pi r v_r \Sigma, \tag{36.24}$$

en donde la *densidad superficial* Σ (masa por unidad de área) está definida como

$$\Sigma := \int \rho dz. \tag{36.25}$$

Para mostrar que la cantidad $\dot{m}$ que se muestra en la ecuación (36.24) es constante, tomemos la ecuación de continuidad para el caso estacionario e integremosla a lo largo del volumen acotado por el anillo del disco cuyo espesor es dr. De esta manera y como la velocidad es únicamente radial, entonces al utilizar el teorema de la divergencia se obtiene que $\oint \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_1 \rho v_r da_r - \int_2 \rho v_r da_r = 0$, en donde da_r es la superficie del anillo que es ortogonal a la superficie del disco de acreción y los subíndices 1 y 2 etiquetan a las dos superficies del anillo que satisfacen esta propiedad. De aquí se sigue que la cantidad $\rho v_r da_r$ es una constante para el flujo de acreción. Debido a que $da_r = dz \times r \int_0^{2\pi} d\varphi$, entonces queda demostrado que la cantidad $\dot{m}$ es una constante.

Calculemos ahora la torca τ que actúa sobre una superficie cilíndrica del disco de

[†]Hoy en día, puede mostrarse que la ecuación (36.23) es una consecuencia natural de la turbulencia magnetohidrodinámica.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

acreción a una distancia r del origen. De acuerdo a la ecuación (36.19), es claro que la torca sobre esta área está dada por

$$\tau(r) = 2\pi r^3 \nu \frac{d\Omega}{dr} \int \rho dz = 2\pi r^3 \nu \Sigma \frac{d\Omega}{dr}. \tag{36.26}$$

y la integral es tomada desde la parte inferior del disco hasta su parte superior.

Por otra parte, el momento angular por unidad de tiempo que fluye a través de la superficie perpendicular al radio r está dada por

$$\dot{m} v_\varphi r = 2\pi r^3 \Sigma v_r \Omega. \tag{36.27}$$

Si consideramos un anillo de disco con espesor dr entonces el momento angular por unidad de tiempo que fluye a través de la superficie ortogonal al radio $r + dr$ está dado por

$$(\dot{m} v_\varphi r)\Big|_{r+\Delta r} = \left(2\pi r^3 \Sigma v_r \Omega\right)\Big|_{r+\Delta r} \approx 2\pi r^3 \Sigma v_r \Omega + 2\pi \frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \Sigma v_r \Omega\right) \Delta r. \tag{36.28}$$

De las ecuaciones (36.27)-(36.28) se sigue que el cambio de momento angular por unidad de tiempo ΔL está dado por

$$\Delta L = (\dot{m} v_\varphi r)\Big|_{r+\Delta r} - \dot{m} v_\varphi r = 2\pi \Delta r \frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \Sigma v_r \Omega\right). \tag{36.29}$$

La torca total que actúa sobre el anillo está dada por $\tau(r + \Delta r) - \tau(r)$. Igualando esto con la ecuación (36.29) y utilizando la igualdad (36.20), se obtiene que

$$\frac{d\tau}{dr} = 2\pi \frac{d}{dr}\left(r^3 \Sigma v_r \Omega\right). \tag{36.30}$$

Por lo tanto, y con ayuda de la ecuación (36.26) se obtiene que

$$\nu \Sigma \frac{d\Omega}{dr} = \Sigma v_r \Omega + \frac{C}{2\pi r^3}, \tag{36.31}$$

en donde C es una constante de integración. Para encontrar el valor de esta constante, notemos que justo en el borde interior del disco, la velocidad de rotación es justamente la

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

velocidad de rotación de la estrella. Como el material en la estrella gira como un cuerpo rígido entonces $d\Omega/dr = 0$ justo en la frontera entre el disco y la estrella. De aquí que el valor de la constante C este dado por

$$C = -2\pi \left(r^3 \Sigma v_r \Omega \right) \Big|_{r_\star}, \tag{36.32}$$

en donde $r_\star$ representa el radio de la estrella. Justo a esta distancia, como sucede a cualquier otra distancia en el disco, la velocidad de rotación de una partícula de fluido es casi Kepleriana y por lo tanto $\Omega^2 = GM_\star/r^3$, con $M_\star$ la masa de la estrella central. Con esto y utilizando la ecuación (36.24) se obtiene que

$$C = -\dot{m}\sqrt{GM_\star r_\star}, \tag{36.33}$$

y por lo tanto la constante C representa la taza de transferencia de momento angular en la superficie de la estrella.

Sustituyendo la ecuación (36.33) en la igualdad (36.31) se obtiene que

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{m}}{3\pi}\left\{1 - \left(\frac{r_\star}{r}\right)^{1/2}\right\}. \tag{36.34}$$

Por otra parte, en el caso de fluidos incompresibles (i.e. div $\boldsymbol{v} = 0$), la taza de disipación de energía cinética $\dot{E}_{cin}$ (pérdida de energía cinética por unidad de tiempo) debida a fuerzas viscosas que actúan en un volumen fijo V de fluido está dada por la integral

$$\dot{E}_{cin} = \frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\int \eta \left(\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu}\right)^2 dV = -\int \eta dV r^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2, \tag{36.35}$$

en donde el último paso en la ecuación (36.35) se obtiene escribiendo la velocidad de la partícula de fluido en cuestión escrita en coordenadas circulares suponiendo que el flujo tiene simetría radial, es decir $\partial/\partial\varphi = 0$, y que la velocidad radial $v_r = \dot{r} = 0$. Ahora bien, debido a que $dV = r d\varphi dz$ para el disco de acreción, entonces la luminosidad L del disco (i.e. la energía ganada por la pérdida de energía cinética en el gas) está dada por

$$L = -\frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = \nu \int_{r_\star}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int \rho r^2 \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)^2 r\, dr\, d\varphi\, dz = 2\pi\nu \int_{r_\star}^{\infty} r^3 \Sigma \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)^2 dr. \tag{36.36}$$

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

Sustituyendo la relación (36.34) en la ecuación (36.36) y teniendo en cuenta que las órbitas de cada partícula de fluido en el disco son Keplerianas se obtiene que

$$L = \frac{3G\dot{m}M_\star}{2}\int_{r_\star}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{r_\star}{r}\right)^{1/2}\right\}\frac{dr}{r^2} = \frac{G\dot{m}M_\star}{2r_\star}. \tag{36.37}$$

Si suponemos que toda la energía térmica generada por las fuerzas viscosas se pierde debido a fenómenos radiativos, entonces la luminosidad de radiación del disco está dada justamente por la ecuación (36.37). Este resultado es sumamente importante. Una partícula de fluido que es acretada hacia el objeto central pasa por una serie de órbitas Keplerianas, quedando amarrada en cada una de estas. La energía de amarre que necesita la partícula para establecerse en cada una de estas órbitas es justamente la mitad de la energía potencial de la partícula evaluada en el radio correspondiente a la órbita[†]. Entonces la partícula de fluido necesita disipar (mediante radiación) la mitad de su energía potencial para poder establecerse en cada una de estas órbitas Keplerianas. Esta energía disipada es la fuente de luminosidad en un disco de acreción. Justo cuando la partícula se ha establecido en la superficie de la estrella central, se ha liberado la mitad de su energía gravitacional. Si la partícula de fluido es llevada al reposo en la superficie de la estrella entonces es necesario que la otra mitad de la energía potencial sea liberada totalmente. En otras palabras, la frontera de la estrella es una fuente de luminosidad tan poderosa como el disco de acreción completo.

Consideremos nuevamente el anillo de espesor Δr. De la ecuación (36.37) se sigue que la luminosidad producida por este anillo localizado en la posición r está dada por

$$L = \frac{3G\dot{m}M_\star}{2r^2}\left\{1-\left(\frac{r_\star}{r}\right)^{1/2}\right\}\Delta r. \tag{36.38}$$

Esta luminosidad es un poco más que sólo la energía de amarre gravitacional que se produce cuando una partícula de fluido se mueve de la posición $r+\Delta r$ a la posición r. En efecto, utilizando la ecuación (25.6) es claro que como $dm = \rho dV$ entonces la taza de energía gravitacional $\dot{W}$ está dada por $\dot{W} = -GM_\star\dot{m}/2r$. De tal manera que la taza de energía de amarre gravitacional evaluada en la posición $r+\Delta r$ está dada por $\approx -GM_\star\dot{m}/2r +$

[†]Esto es claro pues la energía total de una partícula es $E_{tot} = mv^2/2 - GM_\star m/r^2$. Así, para órbitas Keplerianas la aceleración centrífuga se balancea con las fuerzas gravitacionales, i.e. $mv^2/r = GM_\star m/r^2$. Con esto se obtiene que una partícula en una órbita Kepleriana tiene una energía total $E_{tot} = -GM_\star m/2r$.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$GM_\star \dot{m}\Delta r/2r^2$. Con esto se obtiene que la taza de energía de amarre liberada por una partícula al moverse de la posición $r + \Delta r$ a la posición r está dada por $G\dot{m}M_\star\Delta r/r^2$. La diferencia entre esta cantidad y la ecuación (36.38) representa la energía asociada al momento angular que es transportado de la posición r a la posición $r + \Delta r$.

Con todo esto se sigue que a pesar de que la energía total liberada por una partícula que alcanza el radio de la estrella es la mitad de la energía potencial, la taza de disipación de energía está dada por la taza de perdida de energía debida al transporte de momento angular hacia afuera del disco y a la liberación de energía gravitacional. Para ejemplificar esto, tomemos el límite cuando $r \gg r_\star$ en la ecuación (36.38) para obtener así

$$L(r) = \frac{3G\dot{m}M_\star}{2r^2}\Delta r. \tag{36.39}$$

Esta cantidad es tres veces la taza de energía necesaria para amarrar a una partícula que se desplaza de $r + \Delta r$ a la posición r.

Lo más importante en toda la discusión para discos–α es que la luminosidad no depende de la viscosidad ν. Este hecho es justamente lo que da belleza al modelo propuesto por Shakura y Sunayev.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Capítulo VI

Relatividad General

Bajo ciertas circunstancias es necesario que los efectos relativistas deban ser tomados en cuenta en el estudio de fenómenos gravitacionales. Esto sucede cuando los campos gravitacionales son capaces de acelerar a partículas de prueba a velocidades cercanas a la de la luz. En efecto, consideremos una masa de prueba m que orbita alrededor de una masa central M. En gravitación Newtoniana esto significa que la fuerza centrífuga mv^2/r debe ser igual a la fuerza gravitacional GMm/r^2. Aquí, r representa la distancia entre las dos masas y v es la velocidad azimutal de la partícula de prueba alrededor de la masa M. Los efectos relativistas en el campo gravitacional deben ser tomados en cuenta cuando la velocidad $v \approx c$, o bien cuando $GM/rc^2 \approx 1$. Definamos el *parámetro gravitacional* $\chi := 2GM/rc^2$. De esta manera, cualquier fenómeno gravitacional que satisfaga la condición de que $\chi \approx 1$, requiere de una teoría relativista de la gravitación para su descripción. El parámetro gravitacional χ tiene los siguientes valores para distintos objetos astronómicos:

(I) Superficie terrestre: $\chi_{\text{tierra}} \approx 1.4 \times 10^{-18}$.

(II) Superficie del sol: $\chi_{\odot} = 4 \times 10^{-6}$.

(III) Superficie de enana blanca: $\chi_{\text{EB}} \approx 5 \times 10^{-4}$.

(IV) Superficie de estrella de neutrones: $\chi_{\text{EN}} \approx 0.3$.

(V) El universo como un todo: $\chi_{\text{U}} \approx 0.1 - 1$.

Esto muestra que el campo gravitacional alrededor de ciertos objetos compactos requiere de una descripción relativista. La teoría relativista de la gravedad fue diseñada de manera teórica por el gran intelecto de Albert Einstein en 1915 y es muy probablemente la teoría más bella de todas las teorías físicas. Ya que el estudio de esta teoría relativista es extenso, solamente nos concentraremos en los principios básicos de la misma y daremos por hecho algunos de sus resultados para poder aplicarlos a ciertos objetos astronómicos.

§37. Experimentos de Eötvos, Dicke y Braginsky

La ley de Newton de movimiento establece que la fuerza $\mathbf{f}$ es una función que depende de la posición, las velocidades y el tiempo. Esta fuerza es proporcional a la aceleración $\mathbf{a}$ a través de una constante que caracteriza al cuerpo llamada la *masa* m del objeto, es decir,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{f}. \tag{37.1}$$

Por otra parte, la ley de Newton de gravitación universal nos dice que la relación funcional de la fuerza (el lado derecho de la ecuación (37.1)), producida por dos masas m_1 y m_2, y que actúa sobre la primera, está dada por

$$\mathbf{f} = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}\widehat{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}, \tag{37.2}$$

donde $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son los radio vectores de las masas correspondientes.

En principio, las masas m, m_1 y m_2 son cosas completamente diferentes. De acuerdo con la ley de Newton de movimiento m es la *masa inercial* de la partícula que se acelera y funciona como una resistencia a esta aceleración. Recuerda que la masa inercial se define como el cociente de la norma de la fuerza entre la aceleración que la fuerza proporciona a la partícula. Por otra parte, las masas que aparecen en la ley de Newton de la gravitación se llaman *masas gravitacionales* y su función es que dan la respuesta correcta al valor de la fuerza gravitacional producida por su presencia. Es bueno pensar en éstas como unas *cargas gravitacionales*, en analogía con las cargas eléctricas y la ley de Coulomb.

En la ley de Newton de gravitación aparecen las masas de manera bastante simétrica. En efecto, la *masa pasiva* $m_2(p)$, funciona como un potencial gravitacional de la *masa activa* $m_1(a)$. Este potencial le dice a la masa $m_1(a)$ como moverse. Análogamente, si

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

consideramos a la masa $m_1(p)$ como la masa pasiva, entonces esta misma funciona como un potencial gravitacional que le dice a la masa activa $m_2(a)$ como moverse. La ley de Newton de movimiento implica que las masas pasiva y activa son proporcionales una a la otra ya que la fuerza de la primera en la segunda debe ser el negativo de la fuerza producida por la segunda en la primera. En efecto, la ley de Newton implica que $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$. Esto significa que $Gm_1(a)m_2(p)/r^2 = Gm_1(p)m_2(a)/r^2$, donde r es la distancia que separa a ambas masas. De aquí se sigue que

$$\frac{m_1(a)}{m_2(a)} = \frac{m_1(p)}{m_2(p)}.$$

La relación entre la masa gravitacional y la masa inercial tiene que ser encontrada mediante el experimento. Por ejemplo, consideremos un péndulo que bajo la acción de la gravedad se mueve. Para un ángulo de apertura θ pequeño, la fuerza que acelera al péndulo es $-m_g g \sin\theta \approx -m_g g\theta$, donde m_g es la masa gravitacional y g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la tierra. Ahora bien, de acuerdo a la ley de Newton de movimiento, la fuerza es el producto de la masa inercial m_i multiplicado por $d^2(l\theta)/dt^2$, donde l es la longitud del hilo que cuelga del péndulo. De tal forma que podemos escribir la ecuación de movimiento del péndulo como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{m_g}{m_i}\right)\left(\frac{g}{l}\right)\theta. \tag{37.3}$$

La frecuencia angular del péndulo ω está entonces dada por $\omega^2 = (m_g/m_i)(g/l)$, de tal manera que péndulos de distinta masa e igual dimensión (longitud) oscilan con el mismo periodo si $m_g \propto m_i$. Newton realizó este experimento y encontró evidencia para esta proporcionalidad con una precisión de una parte en 1000.

Experimentos más recientes hechos por el Barón de Eötvos en los 1880's mostraron la proporcionalidad de ambas masas con resultados más precisos. Sus experimentos consistieron en ver si existía movimiento alguno en una balanza de torsión debido a algún desequilibrio entre la fuerza centrífuga experimentada por una masa inercial en la superficie de la tierra mientras ésta rota. La rotación de esta masa es debida a la rotación natural de la tierra y la fuerza gravitacional que actúa sobre ésta gracias a la gravedad de la tierra. En la década de los 1960's, Robert H. Dicke y colaboradores utilizaron al sol en vez de la

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

tierra y a la fuerza centrífuga producida por el movimiento de la tierra alrededor del sol. Braginsky y Panov en los 1970's encontraron aún mejores resultados que Dicke y establecieron la linealidad entre la masa inercial y la masa gravitacional con una precisión mejor a una parte en 10^{12}.

De estos experimentos se sigue entonces que la proporcionalidad de la masa inercial y gravitacional. El resultado clave es identificar ambas masas como iguales. Esto es lo que da origen al principio *principio de equivalencia* formulado por Einstein.

§38. Principio de equivalencia

La propiedad más importante de los campos gravitacionales es que cuerpos de distintas masas se mueven de la misma manera bajo la influencia del mismo campo gravitacional. Esto no es de extrañarse, pues dos cuerpos de distintas masas caen con la misma aceleración al suelo en la tierra. Experimentos de este estilo y muy rudimentarios fueron hechos por Galileo. Se dice que Galileo utilizó la torre inclinada de Pisa para mostrar que cuerpos de masas distintas que dejan el reposo caen en el mismo tiempo al suelo de la tierra.

Esta propiedad de los campos de gravedad permite la posibilidad de establecer una analogía entre el movimiento de un cuerpo en un campo gravitacional y el movimiento de un cuerpo localizado fuera de un campo gravitacional pero en un sistema de referencia no–inercial. De esta manera las propiedades del movimiento de un cuerpo en un sistema de referencia no–inercial y uno inercial con un campo de gravedad, son los mismos. Esta equivalencia entre campos de gravedad y sistemas de referencia no–inerciales se denomina *principio de equivalencia* y fue formulado por Einstein en 1915.

Un cuerpo que se mueve libremente en un sistema de referencia inercial sobre el cual actúa un campo gravitacional es acelerado en una dirección debido a la fuerza que le imparte el campo gravitacional. El mismo comportamiento del cuerpo puede obtenerse en un sistema de referencia no–inercial que tiene una aceleración en la misma dirección que el campo gravitacional original.

Existe sin embargo una diferencia fundamental entre los sistemas de referencia no–inerciales y los campos gravitacionales que actúan sobre sistemas de referencia inerciales. A una distancia infinita de los cuerpos que producen el campo gravitacional, el valor del campo gravitacional tiende a desvanecerse. Sin embargo, los sistemas de referencia no–

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

inerciales equivalentes a los campos de gravedad incrementan el valor de su aceleración de manera ilimitada a medida que se aproximan a infinito. Este es el caso de un movimiento circular alrededor de un eje. La aceleración centrífuga diverge a una distancia infinita del eje de rotación. Por otra parte, en el caso de un movimiento acelerado uniforme, la aceleración no diverge en infinito, sino que permanece constante.

Debido a estos argumentos, es posible eliminar un "campo gravitacional" producido por la aceleración de un sistema de referencia no–inercial. Basta con hacer una transformación de sistema de coordenadas de manera apropiada. Sin embargo, un campo gravitacional actual (como el que produce una masa puntual descrito por la ley de Newton de gravitación) no puede hacerse desaparecer globalmente mediante una transformación de coordenadas. Lo mejor que se puede hacer es eliminar el campo gravitacional en una región suficientemente pequeña alrededor de un determinado punto en el espacio mediante la elección de un sistema de referencia no–inercial. Este último sistema no–inercial se escoge de tal manera que debe acelerarse en magnitud y en dirección igual a la aceleración producida por el campo gravitacional[†].

Matemáticamente la equivalencia entre los campos gravitacionales y la aceleración se debe a que la ecuación de movimiento que se obtiene a partir del Lagrangiano $L = mv^2/2 - m\phi$ de una partícula libre moviéndose en un campo de gravitación está dada por

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\,\text{grad}\;\phi. \tag{38.2}$$

Esta última relación no involucra a la masa m de la partícula en cuestión.

§39. Gravitación y espacios curvos

Analicemos ahora la manera de describir el espacio–tiempo de un campo gravitacional. Consideremos un sistema de referencia inercial S descrito por $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$. Desde

[†]Cabe hacer notar que existen efectos gravitacionales como la fuerza de marea que no puede eliminarse ni siquiera bajo la elección de este sistema de referencia no–inercial. Por ejemplo, puede mostrarse (¡hazlo!) que dos partículas que son dejadas en libertad a partir del reposo y cuya separación inicial está dada por el vector $\mathbf{r}$, cumplen con

$$d^2r_\mu/dt^2 = R_{\mu\nu}r_\nu \tag{38.1}$$

donde $R_{\mu\nu} = \text{diag}(-GM/r^3,\ -GM/r^3,\ -GM/r^3)$ y M es la masa total del sistema.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

otro sistema de referencia inercial S' el intervalo ds' es tal que $ds = ds'$. Esta propiedad muestra matemáticamente el principio de relatividad de Einstein. Si ahora transformamos el sistema de referencia inercial S a uno S' que rota con velocidad angular constante Ω a lo largo del eje z de tal forma que

$$x = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t, \qquad y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t, \qquad z = z', \tag{39.1}$$

entonces el intervalo en el sistema S' se puede escribir como

$$ds^2 = \left\{c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)\right\} dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz'^2 + 2\Omega y' dx' dt - 2\Omega x' dy' dt. \tag{39.2}$$

Tarea 13

Demuestra la ecuación (39.2)

Esta relación muestra que el cuadrado del intervalo aparece como una cuadrática de forma general en las diferenciales de las coordenadas. Así pues, podemos decir que el intervalo en su forma más general toma la forma

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \tag{39.3}$$

Las cantidades g_{ik} representan la *métrica del espacio–tiempo* y son escogidas de manera simétrica (i.e. $g_{ik} = g_{ki}$) debido a la simetría de la ecuación (39.3). Es claro también que g_{ik} es un tensor pues $dx^k dx^i$ es un tensor y ds un escalar. Por esta razón se denomina frecuentemente a la métrica del espacio tiempo como *el tensor métrico*. La propiedad innata que posee el tensor métrico es que al transformar de un sistema de referencia cualquiera a uno inercial, las componentes de este tensor están dadas por $g_{ik} = \text{diag}\,(1, -1, -1, -1)$. Es decir, cuando las coordenadas utilizadas corresponden a las de un espacio plano, $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, la métrica es justamente la métrica del espacio de Minkowski. Un cuatro–espacio con esta última métrica se denomina *galileano*. El tensor métrico en su forma general, no puede ser llevado a su forma galileana para todo el espacio mediante una transformación de coordenadas. Esto muestra que los

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

campos gravitacionales no pueden ser eliminados totalmente por una transformación de coordenadas o lo que es igual, mediante la elección de un sistema de referencia adecuado como habíamos mencionado anteriormente.

Los cuatro–espacios determinados por la ecuación (39.3) se denominan *curvos*, a diferencia de sus contrapartes galileanos que frecuentemente se dicen *planos*. Para aclarar el significado de estos términos consideremos lo que sucede al transformar un sistema de referencia inercial K a uno no–inercial K' que rota con respecto al eje z con velocidad angular constante. Consideremos una circunferencia C dibujada en el plano Oxy, cuyo origen es atravesado por el eje z. En el sistema K, el cociente de la circunferencia del circulo entre su diámetro es una constante que es igual a π. Sin embargo, en el sistema que rota, un pedacito de circunferencia sobre el circulo recibe una contracción de Lorentz. De esta manera, al sumar todos los pedacitos de circunferencia en el sistema K' se obtiene una circunferencia menor a la medida en el sistema K. Por tanto la razón de la circunferencia al diámetro (que no sufre una contracción de Lorentz) es menor a π. En otras palabras, es como si el circulo hubiese sido dibujado sobre una superficie del tipo de una silla de montar para la cual, la curvatura es negativa. Por otra parte, si la razón entre diámetro y circunferencia hubiese sido mayor a π, podríamos pensar que el circulo estuviese dibujado en un espacio como el de una esfera, donde la curvatura es positiva.

Cuando el tensor g_{ik} es llevado a su forma diagonal (i.e. $g_{ik} = 0$ para $i \neq k$), se obtiene que tres de los elementos diagonales son negativos y uno positivo. En otras palabras, el signo de la métrica es $(+, -, -, -)$. De aquí se obtiene que el determinante g de la matriz formada por las componentes del tensor g_{ik} es negativo para un espacio–tiempo verdadero[†]

$$g < 0. \tag{39.4}$$

El estudio de la gravitación relativista, o *relatividad general* –como el mismo Einstein bautizó a su teoría– impone cambios drásticos en la concepción del espacio–tiempo, distintas a lo que estamos acostumbrados. Justamente el estudio de espacios curvos y sus conexiones con la gravitación representa el estudio de la teoría de la relatividad general.

[†]Si la la métrica en el espacio–tiempo de Minkowski hubiese sido escogida como $g_{ik} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$ entonces el signo de la métrica en un espacio curvo sería $(-, +, +, +)$ y por lo tanto la desigualdad (39.4) estaría invertida.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

§40. Corrimiento al rojo gravitacional

Consideremos el *elevador de Einstein*, i.e. un elevador común y corriente que es acelerado hacia abajo debido a la presencia de un campo gravitacional como se muestra en la Figura VI.1. La aceleración de este elevador es $\mathbf{g}$. Utilizando el principio de equivalencia, esta situación es equivalente a que el elevador sea acelerado hacia arriba con una aceleración $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$ en ausencia de campos gravitacionales. Con esto, la fuerza que se ejerce sobre cualquier persona dentro del elevador es idéntica a la fuerza gravitacional que produce el campo gravitacional $\mathbf{g}$. Un rayo de luz con frecuencia ν se propaga desde el techo hasta el suelo del elevador. El tiempo t que tarda el haz de luz en recorrer el elevador está dado por $t = h/c$, donde h es la altura del elevador. En este tiempo, el suelo del elevador se acelera a una velocidad $v \approx at = gt = gh/c$. De aquí que la frecuencia ν_{obs} del fotón que llega al suelo esté dada por

$$\nu_{obs} \approx \nu_{em}\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \nu_{em}\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right), \tag{40.1}$$

de acuerdo al efecto Doppler (18.9). Como $g = -\Delta\phi/h$, donde ϕ es el potencial gravitacional, entonces

$$\nu_{obs} = \nu_{em}\left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right). \tag{40.2}$$

En términos del *corrimiento al rojo gravitacional* z, la ecuación (40.2) queda como

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\nu_{em} - \nu_{obs}}{\nu_{obs}} \approxeq \frac{\Delta\phi}{c^2}, \qquad \text{cuando} \qquad \Delta\phi/c^2 \ll 1. \tag{40.3}$$

Esto significa que la frecuencia de las ondas electromagnéticas depende de la intensidad y variaciones del campo gravitacional[†].

En términos del periodo $\Delta t = 1/\nu$, la ecuación (40.1) toma la forma

$$\Delta t_{obs} = \Delta t_{em}\left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right). \tag{40.4}$$

[†]Sir Arthur Eddington en la década de los 1920's calculó que las líneas espectroscópicas de la enana blanca Sirius B (cf. sección §30) deberían de tener un corrimiento al rojo de 20 km/s –utilizando la ecuación (40.1) se obtiene que $zc = v$, razón por la que en ocasiones el corrimiento al rojo se mide en unidades de distancia sobre tiempo. Poco después, Adams midió que el corrimiento al rojo de las líneas era de 19 km/s.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

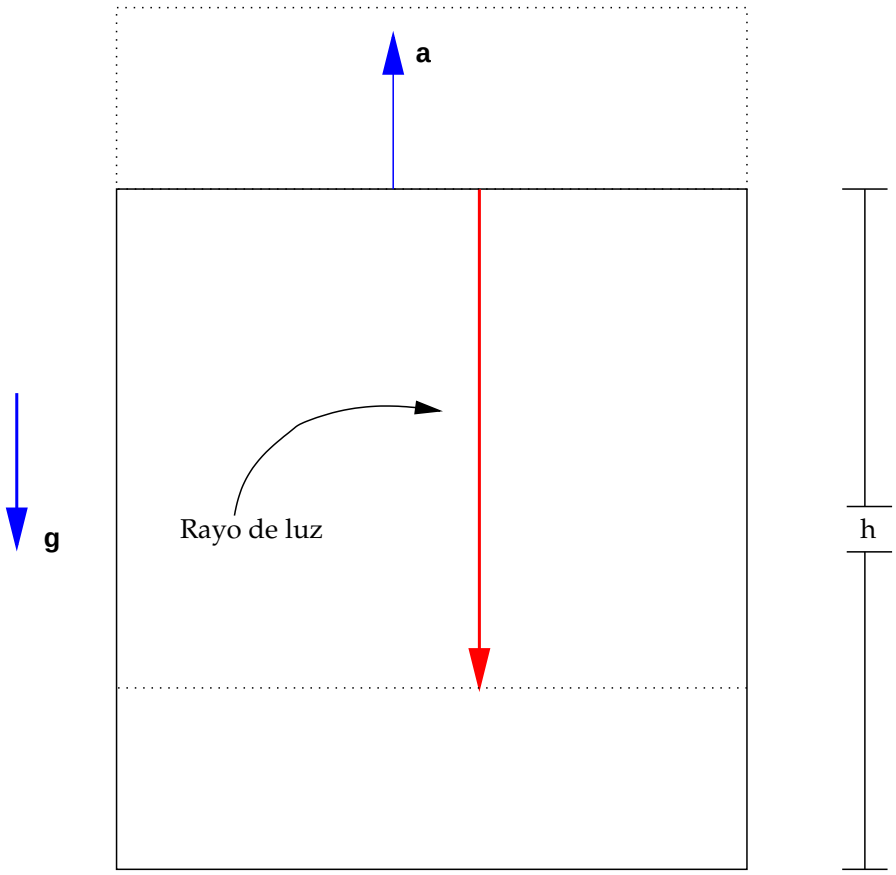

Figura VI.1: Un elevador (el elevador de Einstein) es dejado en caída libre y por lo tanto la gravedad le produce una una aceleración $\mathbf{g}$ hacia abajo. Esto es equivalente a que el elevador se acelere hacia arriba con una aceleración $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$ en ausencia de campos gravitacionales. Un rayo de luz tarda un tiempo h/c en recorrer la distancia del techo al piso del elevador. Debido a que el piso se mueve hacia el rayo de luz (gracias a la aceleración que éste tiene hacia arriba), esto produce un corrimiento al rojo en la frecuencia del fotón cuando llega al suelo.

Esta relación representa la *dilación del tiempo* que se obtiene entre dos puntos del espacio–tiempo bajo la influencia de un campo gravitacional. Nota que esta dilación no se da entre dos sistemas de referencia como sucede en relatividad especial. Esta dilación se refiere a dos puntos del espacio–tiempo con respecto a un mismo sistema de referencia. Como veremos más adelante, esta expresión es justamente la dilación del tiempo que se obtiene entre

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

cualesquiera dos puntos del espacio tiempo cuando $\Delta\phi/c^2 \ll 1$. Por lo tanto, un intervalo de tiempo dt' está dado por

$$dt' = dt\left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right). \tag{40.5}$$

Supongamos ahora que dt es un intervalo de tiempo medido en infinito, en donde el campo gravitacional $\phi = 0$ (recuerda que todo campo físico se anula en ∞). Con esto y debido a que $\phi/c^2 \ll 1$, el intervalo de tiempo dt' medido en cualquier punto del espacio está dado por

$$dt'^2 = dt^2\left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right)^2 \approxeq dt^2\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right). \tag{40.6}$$

De esta manera, el intervalo $ds^2 = c^2dt'^2 - dl^2$ para la métrica del espacio–tiempo de Minkowski está dado por

$$ds^2 = c^2dt^2\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) - dl^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) - dl^2, \tag{40.7}$$

en donde hemos escrito al potencial gravitacional $\phi = -GM/r$. Es importante remarcar que la métrica (40.7) es válida únicamente cuando $\phi/c^2 \ll 1$. Dicho de otro modo, esta métrica es la primera corrección a la métrica del espacio–tiempo de Minkowski. A este orden de aproximación, la corrección ocurre únicamente en la componente g_{00} del tensor métrico que toma el valor $g_{00} = (1 + 2\phi/c^2)$.

§41. Deflexión de rayos de luz

En la sección anterior mostramos que la componente temporal dt de la métrica de Minkowski necesariamente debe cambiarse al incluir campos gravitacionales. En esta sección mostraremos también que la componente espacial dl de la métrica debe cambiarse cuando existe un campo gravitacional. Para esto consideremos nuevamente el elevador de Einstein que se encuentra en caída libre bajo la acción de un campo gravitacional $\mathbf{g}$. Esta situación es equivalente a considerar un elevador que se acelera con una aceleración $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$. De una de las paredes del elevador se emite un rayo de luz como se muestra en la Figura VI.2. Si la aceleración es pequeña, i.e. $\Delta\phi/c^2 \ll 1$, entonces la distancia $d = AB$ recorrida por un

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

fotón, que es aproximadamente una parábola, puede ser aproximada por un segmento de circunferencia cuyo radio de curvatura es $\mathfrak{R}$. Además, debido a que el segmento $DB = gt^2/2$ entonces $\tan(\theta/2) \sim \theta/2 \sim gt^2/2l$. Por otra parte, como $AB^2 \approx DB^2 + l^2$ y como el radio de curvatura $\mathfrak{R} = d/\theta$ entonces

$$\mathfrak{R}^2 = \frac{d^2}{\theta^2} = \frac{1}{4}l^2 + \frac{l^2}{g^2t^4}. \tag{41.1}$$

Debido a que $gt^2/2 \ll l$ y como $l = ct$ entonces la ecuación (41.1) toma la forma

$$\mathfrak{R} = \frac{l^2}{gt^2} = \frac{c^2}{g}. \tag{41.2}$$

La ecuación (41.2) significa que la curvatura de los rayos de luz depende del valor de la aceleración local gravitacional g. Debido a que $\mathbf{g} = -\nabla\phi$, con ϕ el potencial gravitacional, es claro entonces que la curvatura de los rayos de luz depende de la distribución de las masas en el espacio. En otras palabras, "¡*las masas le dicen al espacio como curvarse*!"

Los ejemplos de las figuras (VI.1)-(VI.2) muestran que el espacio y el tiempo son "curvos" cuando los efectos relativistas son incluidos en los campos gravitacionales.

§42. Vectores y tensores en espacios curvos

Para continuar con el estudio de la relatividad general es necesario que formulemos un lenguaje tensorial adecuado con espacios curvos de cuatro dimensiones. Esto es considerablemente más difícil que su contraparte pseudo–euclidiano.

El objeto geométrico que describe a un espacio–tiempo de cuatro dimensiones es una *variedad diferencial*[†]. Dado un sistema de coordenadas (un sistema de referencia), cada punto P sobre la variedad queda representado mediante las *coordenadas* $x^k = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

[†]Una *variedad diferencial* de dimensión n es un objeto geométrico que localmente se ve como $\mathbb{R}^n$. En otras palabras, es posible aproximar cualquier región suficientemente pequeña alrededor de un punto cualquiera P sobre la variedad mediante un plano tangente de dimensión n. La 2–esfera es uno de los ejemplos más sencillos de una variedad. Localmente se ve como $\mathbb{R}^2$. Esto fue lo que llevó a los Europeos en el oscurantismo a creer que la tierra era plana. La razón por la cual se necesitan variedades para el estudio de la relatividad general es debido al principio de equivalencia. En efecto, dado un punto P del espacio–tiempo existe un sistema de referencia (sistema de coordenadas) mediante el cual se puede eliminar el campo gravitacional en una vecindad de este punto P. Este sistema de coordenadas corresponde a un espacio–tiempo de Minkowski.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

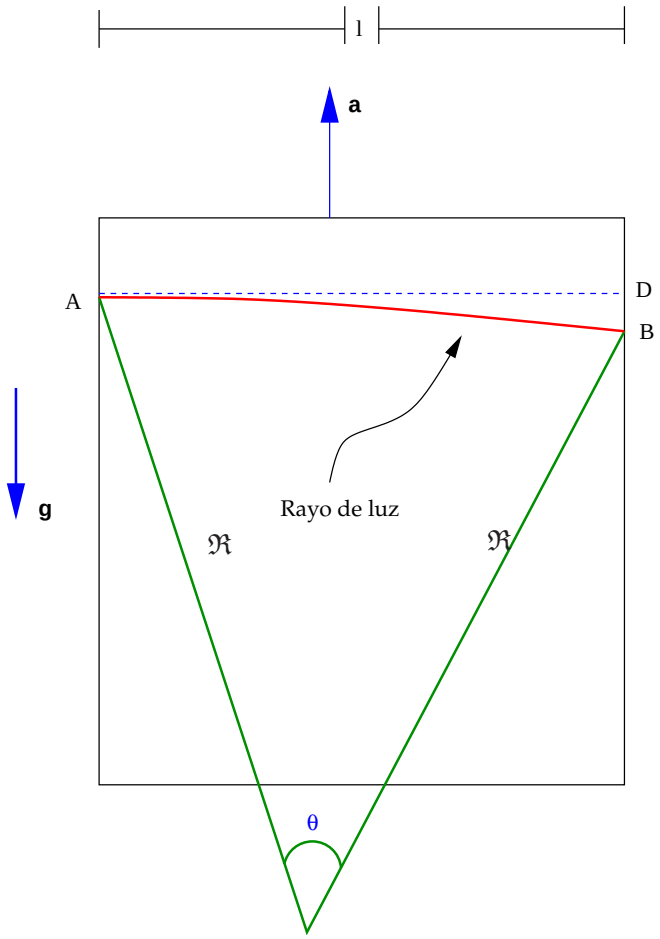

Figura VI.2: El elevador de Einstein cae libremente con una aceleración $\mathbf{g}$ debido a la influencia de un campo gravitacional. Esta situación es equivalente a que el elevador se acelere hacia arriba con una aceleración $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$ en ausencia de campos gravitacionales. En el punto A de la pared izquierda se emite un rayo de luz que tiempo más tarde es detectado en la pared derecha en el punto B. Es claro que el rayo de luz sufre una deflexión debido al movimiento que produce la aceleración $\mathbf{a}$. En la figura se muestra el radio de curvatura $\mathfrak{R}$ del segmento AB.

Este mismo punto P puede ser descrito mediante otro sistema coordenado (otro sistema de referencia) x'^k. La relación entre las coordenadas de ambos sistemas de referencia está dada por la transformación

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$x^k = f^k(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \tag{42.1}$$

en donde f^k es una función que depende de las coordenadas x'^k. La *diferencial* de las coordenadas dx^k está relacionada con la diferencial dx'^k mediante la *regla de la cadena*

$$dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} dx'^m. \tag{42.2}$$

Se dice que un conjunto de cuatro cantidades A^k es un *vector contravariante* si sus componentes se transforman como las componentes de las diferenciales (cf. ecuación (42.2)), es decir,

$$A^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^m. \tag{42.3}$$

La derivada $\partial/\partial x^k$ con respecto a las coordenadas (el *gradiente*) se transforma de un sistema de coordenadas a otro de acuerdo a la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x'^l}. \tag{42.4}$$

Un conjunto de cuatro cantidades A_k forman un *vector covariante* si sus componentes se transforman como las componentes de las derivadas de las coordenadas (cf. ecuación (42.4)), es decir,

$$A_k = \frac{\partial x'^l}{\partial x^k} A'_l. \tag{42.5}$$

Con estas definiciones es claro que las coordenadas x^k no representan ni un vector covariante, ni uno contravariante. Simplemente funcionan como etiquetas para cada punto en el espacio–tiempo.

Un tensor contravariante M^{ik} de rango 2 es un conjunto de 16 cantidades que se transforman como el producto de dos vectores contravariantes, es decir,

$$M^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} M'^{lm}. \tag{42.6}$$

Análogamente, un tensor covariante M_{ik} de rango 2 es un conjunto de 16 cantidades que se transforman como el producto de dos vectores covariantes. Dicho de otro modo,

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$M_{ik} = \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{k}} M_{lm}. \tag{42.7}$$

Un tensor $\Pi^{i}{}_{k}$ de rango 2 mixto se transforma como los productos de un vector covariante por un vector contravariante, es decir,

$$\Pi^{i}{}_{k} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{l}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{k}} \Pi'^{l}{}_{m}. \tag{42.8}$$

De manera totalmente análoga es posible definir tensores de más alto rango. Basta recordar que este tensor, en cualquier índice superior se transforma como las coordenadas de un vector contravariante. Las componentes de cualquier índice inferior se transforman como las componentes de un vector covariante.

Un tensor A^{ik} de rango 2 es simétrico si $A^{ik} = A^{ki}$. En términos de sus componentes mixtas esto es $A^{i}{}_{k} = A_{i}{}^{k}$. Por esta razón, en lo sucesivo escribiremos simplemente A^{i}_{k} a todo tensor de rango 2 simétrico. Un tensor M^{ik} de rango 2 es antisimétrico si $M^{ik} = -M^{ik}$. Claramente, las componentes con índices repetidos en un tensor antisimétrico son nulas, i.e. $M^{00} = M^{11} = M^{22} = M^{33} = 0$.

El *producto escalar* de dos vectores a^{i} y b^{k} es una cantidad invariante pues

$$a^{i}b_{i} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{k}} \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{i}} a'^{k}b'_{l} = \frac{\partial x'^{l}}{\partial x'^{k}} a'^{k}b'_{l} = \delta^{l}_{k} a'^{k}b'_{l} = a'^{m}b'_{m}, \tag{42.9}$$

en donde δ^{k}_{l} es la *delta de Kronecker* o el *tensor unitario de rango 2* que tiene un valor de 1 cuando $k = l$. En cualquier otro caso, el valor de la delta de Kronecker es cero. Con esta definición es claro que δ^{i}_{k} tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia.

La delta de Kronecker satisface la propiedad

$$A^{k} = \delta^{k}_{l} A^{l}. \tag{42.10}$$

Esta relación significa que el producto del vector A^{l} con δ^{k}_{l} es igual al cuatro–vector A^{k}, y por lo tanto la delta de Kronecker es un tensor.

El intervalo ds dado por la relación (39.3) es un escalar. Debido a que dx^{k} es un vector, entonces las cantidades $g_{ik} = g_{ki}$ forman un tensor de rango 2 que se denomina el *tensor métrico*. En ocasiones uno abusa del lenguaje y denomina a g_{ik} como la métrica del espacio–tiempo.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Dos tensores de rango 2, A_{ik} y B^{ik} son *recíprocos* el uno al otro si

$$A_{ik}B^{kl} = \delta^{i}_{l}. \tag{42.11}$$

Particularmente, el tensor métrico g^{ik} es reciproco a si mismo, es decir,

$$g_{kl}\, g^{lm} = \delta^{m}_{k}. \tag{42.12}$$

De aquí que para convertir un vector contravariante a uno covariante y a la inversa, se realice la operación

$$a^{i} = g^{ik}a_{k}, \qquad b_{l} = g_{lm}b^{m}. \tag{42.13}$$

Subir y bajar índices es entonces una operación de contracción como la mostrada en la ecuación (42.13). Por ejemplo, es claro que para cualquier tensor Π^{abcd} de rango 4 la siguiente igualdad es cierta: $\Pi_{a}{}^{bc}{}_{d} = g^{bm}\Pi_{am}{}^{c}{}_{d}$. Además, la ecuación (42.13) indica que $g^{a}{}_{b} = g_{mb}g^{am} = g_{bm}g^{ma} = \delta^{a}_{b}$, es decir, el tensor mixto g^{a}_{b} corresponde a la delta de Kronecker δ^{a}_{b}.

En un sistema galileano de coordenadas (un sistema de referencia inercial) el tensor métrico toma la forma $g_{ik} = g^{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Gracias al principio de equivalencia (o debido a que localmente una variedad se puede aproximar por un espacio plano), es posible de manera local, en una vecindad alrededor de cualquier punto P del espacio–tiempo, llevar a la métrica (encontrar un sistema coordenado) a su forma galileana.

Consideremos ahora el pseudo–tensor unitario completamente antisimétrico de rango cuatro, el *tensor de Levi–Civita* ϵ^{abcd}, en un espacio galileano (cf. sección §13). Transformemos ahora este tensor a un sistema de referencia (espacio curvo) cualquiera y denotémoslo en este espacio como E^{abcd}. Supongamos que las coordenadas x'^{k} etiquetan a los puntos del espacio galileano y que las coordenadas x^{k} representan los puntos del espacio curvo. Con esto, la relación entre los tensores E^{abcd} y ϵ^{abcd} está dada por

$$E^{abcd} = \frac{\partial x^{a}}{\partial x'^{p}}\frac{\partial x^{b}}{\partial x'^{r}}\frac{\partial x^{c}}{\partial x'^{s}}\frac{\partial x^{d}}{\partial x'^{t}}\epsilon^{prst} \tag{42.14}$$

Con ayuda de la ecuación (13.15), la igualdad (42.14) queda como

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$E^{abcd} = J\epsilon^{abcd}, \tag{42.15}$$

en donde

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)} = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right), \tag{42.16}$$

es el Jacobiano de la transformación, es decir, J es el determinante de la matriz formada por las componentes del tensor $\partial x^m/\partial x'^q$. Para calcular el valor de este Jacobiano, consideremos la transformación del tensor métrico $g^{ik\,(0)} := \eta^{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ en el sistema de referencia galileano con coordenadas x'^k a un sistema cualquiera cuyas coordenadas son x^m. La transformación entre ambos sistemas de referencia está dada por

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x^k}{\partial x'^q}\, g^{pq\,(0)}, \tag{42.17}$$

en donde g^{ik} es el tensor métrico en el espacio curvo. Si ahora tomamos el determinante de la ecuación (42.17), entonces $\det(g_{ik}) := g$, y por lo tanto $\det\left(g^{ik}\right) = 1/g$ de acuerdo con la ecuación (42.12). Así, como $\det\left(g^{ik\,(0)}\right) = -1$, entonces $1/g = -J^2$. De aquí que la ecuación (42.16) tome la forma

$$E^{abcd} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{abcd}. \tag{42.18}$$

Esta es la forma que tiene el tensor de Levi–Civita en cualquier sistema coordenado. Es frecuente no utilizar nunca el lado izquierdo de la ecuación (42.18). Por lo tanto, cuando queramos representar al tensor de Levi–Civita en cualquier sistema de referencia, utilizaremos únicamente el lado derecho de la ecuación (42.18). Dicho de otro modo, el tensor $\epsilon^{pqrs}/\sqrt{-g}$ representará de ahora en adelante el valor del tensor (contravariante) de Levi–Civita en cualquier sistema de referencia.

Si ahora bajamos los índices de la ecuación (42.18), obtenemos las componentes covariantes del tensor de Levi–Civita

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$\begin{aligned} E_{pqrs} =& E^{abcd}\, g_{ap}\, g_{bq}\, g_{cr}\, g_{ds} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{abcd}\, g_{ap}\, g_{bq}\, g_{cr}\, g_{ds} = \frac{-g}{\sqrt{-g}}\,\epsilon_{pqrs} \\ &= \sqrt{-g}\,\epsilon_{pqrs}, \end{aligned} \tag{42.19}$$

de acuerdo a la relación (13.15). La ecuación (42.19) significa que las componentes covariantes del tensor de Levi–Civita en cualquier sistema de referencia están dadas por $\sqrt{-g}\,\epsilon_{iklm}$.

Para terminar esta sección generalicemos la forma de realizar integraciones vista en la sección §13 para el caso de espacios curvos.

☆ *Integral sobre un volumen de cuatro dimensiones.* ➜ En un espacio galileano con coordenadas x'^k, un elemento de volumen $d\Omega'$ está dado por $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$. Al transformarlo a un espacio curvo con coordenadas x^k, entonces se obtiene

$$d\Omega' \to \frac{\partial\left(x'^0,\, x'^1,\, x'^2,\, x'^3\right)}{\partial\left(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3\right)}\, d\Omega = \sqrt{-g}\, d\Omega. \tag{42.20}$$

En otras palabras, el elemento $\sqrt{-g}\, d\Omega$ representa el elemento de integración de volumen cuatro–dimensional para cualquier sistema coordenado (plano o curvo).

☆ *Integral sobre una hipersuperficie de tres dimensiones.* ➜ Al igual que en el caso galileano, el elemento de hipersuperficie que se genera entre tres desplazamientos infinitesimales de las coordenadas está dado por el tensor antisimétrico dS^{ikl}. El vector dual a este mismo está dado por la contracción de este tensor con el tensor $\sqrt{-g}\epsilon_{iklm}$. En otras palabras, el elemento de integración para una hipersuperficie de tres dimensiones en un espacio curvo está dado por

$$\sqrt{-g}\, dS_i = \frac{1}{3!}\sqrt{-g}\,\epsilon_{iklm} dS^{klm}. \tag{42.21}$$

☆ *Integral sobre una hipersuperficie de dos dimensiones.* ➜ En este caso, el elemento de superficie generado por dos desplazamientos infinitesimales de las coordenadas está dado por df^{ik}. Entonces, el elemento de integración para una superficie de dos dimensiones curva está dado por el tensor dual a este tensor, es decir,

$$\sqrt{-g}\, df^*_{ik} = \frac{1}{2!}\sqrt{-g}\,\epsilon_{iklm} df^{lm}. \tag{42.22}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

☆ *Integral sobre una hipersuperficie de una dimensión.* ➜ Aquí el elemento de integración es el desplazamiento dx^k.

Los teoremas integrales (teorema de Stokes) vistos en la sección §13 permanecen idénticos. En otras palabras, si utilizamos las definiciones de $d\Omega$, dS_i, df^*_{ik} dadas por las ecuaciones (42.20)-(42.22), entonces las transformaciones (13.24), y las igualdades (13.26) y (13.27) son válidas.

§43. Intervalos de espacio y tiempo

Consideremos dos eventos que se encuentran infinitesimalmente separados en el tiempo y que ocurren en el mismo lugar en el espacio. El intervalo $ds = cd\tau$ entre ambos eventos (cf. sección §11), con τ el *tiempo propio*, es tal que $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ con $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$. Por lo tanto, el tiempo propio está relacionado con la coordenada temporal x^0 mediante la relación

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0 \tag{43.1}$$

De esta manera, si ambos eventos ocurren en el mismo punto del espacio, entonces[†]

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}\,dx^0. \tag{43.3}$$

De aquí se ve que

$$g_{00} > 0. \tag{43.4}$$

Así pues, una métrica g_{ik} del espacio–tiempo satisface dos propiedades importantes. La primera tiene que ver con los signos de la métrica cuando esta misma es llevada a su forma diagonal (i.e. $g_{ik} = 0$ para todo $i \neq k$). Debido a que $\det(g_{ik}) < 0$ cuando la métrica es escrita en su forma galileana y como el signo del determinante es invariante ante transformaciones de coordenadas, entonces uno o tres de los elementos diagonales

[†]Si los eventos no ocurren en el mismo punto del espacio es claro que $d\tau = \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}/c$ y por lo tanto

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}. \tag{43.2}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

de la métrica g_{mp} en su forma diagonal deben ser negativos. Un tensor métrico que no satisfaga esta condición, carece de sentido físico y no corresponde a alguna métrica de un espacio–tiempo real. La segunda condición tiene que ver con el signo de la componente temporal de la métrica (43.4). Si el tensor métrico satisface la primera condición y no la segunda, entonces es posible, mediante una transformación de coordenadas adecuada, lograr que la condición (43.4) sea llevada acabo.

En relatividad especial, el elemento de distancia espacial dl fue obtenido considerando dos eventos infinitesimalmente separados que ocurren a un mismo tiempo. Justamente, cuando $dx^0 = 0$ en un espacio galileano se obtiene que el elemento de distancia espacial está dado por $dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$. Esto mismo procedimiento no puede realizarse para el caso de espacios curvos, debido a que el tiempo propio tiene una dependencia en la coordenada x^0 que varia de acuerdo a la posición en el espacio como se ve de la ecuación (43.3).

Para calcular el *elemento de longitud* dl en un espacio curvo, realicemos el siguiente experimento. En un punto A del espacio lancemos una señal de luz hacia el punto B, donde se encuentra un espejo que rebota la radiación de vuelta hacia el punto A. Supongamos que el evento de salida del haz de luz corresponde a la posición $x^k + dx^k$. El evento del reflejo del haz de luz corresponde a x^k. Escribamos ahora al intervalo ds como

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k = g_{00}\left(dx^0\right)^2 + 2g_{0\alpha}\,dx^0 dx^\alpha + g_{\mu\nu}\,dx^\nu dx^\mu. \tag{43.5}$$

La trayectoria del haz de luz que parte de A hacia B y luego regresa hacia A por el mismo camino es tal que $ds = 0$. Sustituyendo este valor en la ecuación (43.5) y resolviendo para dx^0 obtenemos dos soluciones

$$dx^{0\,(\pm)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{-g_{0\mu}\,dx^\mu \pm \sqrt{(g_{0\mu}\,g_{0\nu} - g_{\mu\nu}\,g_{00})\;dx^\mu dx^\nu}\right\}, \tag{43.6}$$

De aquí se sigue que la señal sale del punto A al tiempo $x^0 + dx^{0\,(-)}$, llega al punto B al tiempo x^0 y regresa nuevamente al punto A al tiempo $x^0 + dx^{0\,(+)}$. El tiempo total que se lleva desde la salida del punto A hasta que el haz vuelve a regresar al mismo punto es

$$dx^{0\,(+)} - dx^{0\,(-)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\mu}\,g_{0\nu} - g_{\mu\nu}\,g_{00})\;dx^\mu dx^\nu}. \tag{43.7}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

De acuerdo a la ecuación (43.1), el intervalo correspondiente de tiempo propio es entonces la cantidad (43.7) multiplicada por $\sqrt{g_{00}}/c$. De esta manera, la distancia dl entre el punto A y el punto B está dado por este tiempo propio multiplicado por $c/2$, es decir,

$$dl^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{43.8}$$

en donde el tensor métrico $\gamma_{\mu\nu}$ del tres–espacio está dado por

$$\gamma_{\mu\nu} := -g_{\mu\nu} + \frac{g_{0\mu} g_{0\nu}}{g_{00}}. \tag{43.9}$$

La forma cuadrática (43.8) para el elemento de longitud dada por la debe ser positiva definida, es decir,

$$\gamma_{11} > 0, \qquad \det \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} > 0, \qquad \det \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} > 0. \tag{43.10}$$

Si ahora sustituimos los valores de $\gamma_{\mu\nu}$, dados por la relación (43.9), en la ecuación (43.10) se obtiene que el tensor métrico g_{ik} del cuatro–espacio satisface

$$g_{00} > 0, \qquad \det \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{bmatrix} < 0, \qquad \det \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} > 0, \qquad g < 0. \tag{43.11}$$

Un espacio métrico cuyas componentes no satisfacen estás condiciones carece de sentido físico, es decir, no puede ser generado por cuerpos masivos de la naturaleza.

Veamos ahora como sincronizar los relojes en un espacio curvo. En el caso del intercambio de las señales de luz que salen de A, llegan a B y son reflejadas nuevamente hacia el punto A, podemos decir que el evento simultaneo con el punto B, cuyo tiempo está dado por la coordenada x^0, está dado por la mitad del avance del reloj entre los momentos de salida y retorno al punto A. En otras palabras, el tiempo

$$x^0 + dx^0 = x^0 + \frac{1}{2}\left(dx^{0\,(+)} + dx^{0\,(-)} \right), \tag{43.12}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

medido en el punto A, está sincronizado con el tiempo x^0 que está medido en el punto B. Con ayuda de la ecuación (43.6) se ve entonces que la diferencia de tiempo dx^0 que se obtiene de sincronizar dos puntos infinitesimalmente separados en el espacio está dado por

$$dx^0 = -g_\mu dx^\mu. \tag{43.13}$$

en donde el cuatro–vector g_μ está dado por

$$g_\mu := \frac{g_{0\mu}}{g_{00}} \tag{43.14}$$

A lo largo de un circuito cerrado, la integral de línea que se obtiene de la ecuación (43.13) no es necesariamente cero. Es claro entonces que no es posible en primera instancia, sincronizar los relojes en un espacio curvo. Esto puede lograrse únicamente en los casos en los que las componentes del tensor métrico sean tales que $g_{0\beta} = 0$. Bajo estas circunstancias es posible sincronizar todos los relojes localizados en una variedad.

El hecho de que no sea posible sincronizar relojes en el espacio no es una propiedad innata a la geometría de la variedad (del espacio–tiempo). Esto se debe a la arbitrariedad de las coordenadas (del sistema de referencia) escogidas. Mediante una transformación de coordenadas es posible, de una infinidad de maneras, llevar a las componentes $g_{0\beta}$ del tensor métrico a un sistema de referencia donde estas se anulen.

En un espacio plano el tiempo propio elapsa de manera distinta para dos relojes que se mueven uno con respecto al otro (cf. sección §11). En el caso de espacios curvos, esto es cierto incluso para relojes que están en reposo uno con respecto del otro, pero localizados en puntos diferentes del espacio. Esto significa que el intervalo de tiempo propio que elapsa entre dos eventos que ocurren en algún lugar del espacio y el intervalo de tiempo que ocurre entre dos eventos simultáneos a estos dos en otro punto del espacio, difieren entre si.

§44. Diferenciación

En un espacio plano de cuatro dimensiones, la diferencial dA^k de un vector A^k forma un vector. Además, la derivada $\partial A^k/\partial x^l$ forma un tensor. En un espacio curvo esto no es siempre cierto. Dicho de otro modo, en un espacio curvo cualquiera no siempre sucede que la diferencial dA^k sea un vector y que $\partial A^k/\partial x^l$ sea un tensor. Para ver esto, consideremos la

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

transformación del vector A^k de un sistema de referencia a otro, dada por la ecuación (42.3). La diferencial de esta relación es

$$dA^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} dA'^m + d\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}\right) A'^m = \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} dA'^m + A'^m dx^p \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^m \partial x^p}. \qquad (44.1)$$

Esta cantidad es un vector si y sólo si $\partial^2 x^k/\partial x'^m \partial x^p = 0$, es decir, si la transformación de coordenadas es lineal. La razón por la que la diferencial dA^k no es un vector en general se debe a que esta diferencial representa la diferencia del vector A^k localizado en dos puntos del espacio infinitesimalmente separados y, como se ve de la ecuación (42.3), para distintos puntos del espacio las componentes del vector A^k se transforman de manera distinta. Este mismo análisis puede hacerse también para las cantidades $\partial A^k/\partial x^l$ y debido a la transformación (42.4) se sigue que esta cantidad no es un tensor en términos generales.

Lo que haremos ahora es buscar un equivalente a la diferencial dA^k en un espacio curvo que se comporte como un vector. Dicho de otro modo, transformemos al tensor dA^k descrito en un espacio galileano, a un espacio curvo. En coordenadas curvilíneas sucede que para calcular la diferencial de un vector (i.e. la diferencia entre los valores de un mismo vector localizado en dos puntos infinitesimalmente cercanos) de tal manera que esta operación genere un vector, es necesario que los dos valores del vector sean sustraídos en el mismo punto del espacio. Además, esta diferencia debe ser tal que cuando se lleve acabo en un sistema de coordenadas galileano, coincida con la diferencial dA^k. En coordenadas galileanas, la operación requerida coincide con trasladar paralelamente a si mismo a uno de los vectores desde un punto hasta donde se localiza el otro vector. Este *transporte paralelo* es justamente lo que hasta ahora haz realizado para calcular la diferencial de dos vectores localizados en un espacio Euclidiano. Debido a las propiedades de un espacio plano, al trasladar paralelamente en si mismo a un vector de un punto a otro, el valor del vector no varía. Sin embargo, en un espacio curvo, al realizar esta operación se obtiene que las componentes del vector trasladado paralelamente a si mismo, varían.

De esta manera, para calcular la "diferencial" de un vector A^k localizado en el punto x^k del espacio, en coordenadas curvilíneas, es necesario realizar la siguiente operación. El valor del vector A^k en el punto $x^k + dx^k$ está dado por $A^k + dA^k$. Si ahora sometemos al vector A^k a un desplazamiento paralelo a si mismo, hasta llegar al punto $x^k + dx^k$ entonces

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

el vector tendrá el valor $A^k + \delta A^k$. La diferencia DA^k que se obtiene de substraer el valor $A^k + \delta A^k$ del vector $A^k + dA^k$, y que corresponde al valor de la diferencial en coordenadas curvilíneas, está dada por

$$DA^k = \left(A^k + dA^k\right) - \left(A^k + \delta A^k\right) = dA^k - \delta A^k. \tag{44.2}$$

De aquí, es claro que cuando se tienen coordenadas galileanas, el desplazamiento paralelo del vector A^k sobre si mismo es tal que $\delta A^k = 0$ y por lo tanto la diferencial DA^k corresponde con el valor dA^k como se espera.

La cantidad δA^k por la cual cambian las componentes del vector A^k al realizar un transporte paralelo infinitesimal depende de los valores de las componentes del mismo vector. Debido a que la suma de dos vectores, digamos $A^k + B^k$, debe de transformarse de la misma manera que cada uno de sus pedazos independientes, entonces $\delta\left(A^k + B^k\right) = \delta A^k + \delta B^k$. En otras palabras, δ es una función lineal. Claramente,

$$\delta A^k = -\Gamma^k_{lm} A^l dx^m. \tag{44.3}$$

Las cantidades Γ^k_{lm} se denominan los *símbolos de Christoffel* o la *conexión*. Los símbolos de Christoffel son tales que $\Gamma^k_{lm} = 0$ en un sistema galileano, donde $\delta A^k = 0$. Esto indica que la conexión no representa a un tensor, pues un tensor que es igual a cero en un sistema de referencia es idénticamente igual a cero en cualquier otro sistema de referencia. En un sistema de coordenadas curvilíneas es por lo tanto imposible hacer cero a los símbolos de Christoffel en todo el espacio. Sin embargo, debido al principio de equivalencia, es siempre posible escoger un sistema de coordenadas de tal forma que la conexión se anule en una región suficientemente pequeña del espacio, en donde el espacio es plano y la gravedad ha sido eliminada localmente.

Ante un desplazamiento paralelo, un escalar es invariante. En otras palabras, $\delta\,(\text{escalar}) = 0$. El producto escalar $A^k B_k$ de dos vectores A^k y B^k es un escalar y por lo tanto

$$\delta\left(A^k B_k\right) = A^k\,\delta B_k + B_k\,\delta A^k = 0.$$

De aquí que,

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$A^k\,\delta B_k = A^i\,\delta B_i = -B_k\,\delta A^k = B_k\Gamma^k_{lm}A^l dx^m,$$

y por lo tanto

$$\delta B_k = \Gamma^l_{kp}B_l dx^p. \tag{44.4}$$

De las ecuaciones (44.2), (44.3) y (44.4) se sigue que

$$DA^k = A^k_{\ ;p}\,dx^p, \qquad DA_k = A_{k;p}\,dx^p, \tag{44.5}$$

en donde la *derivada covariante* $(\ )_{;p}$ del vector contravariante A^k está dada por

$$A^k_{\ ;p} := \frac{\partial A^k}{\partial x^p} + \Gamma^k_{mp}A^m, \tag{44.6}$$

y la derivada covariante del vector covariante A_k está dada por

$$A_{k;p} := \frac{\partial A_k}{\partial x^p} - \Gamma^m_{kp}A_m. \tag{44.7}$$

De la ecuación (44.5) se ve que, como dx^k, DA^m y DA_r son vectores, las cantidades $A^k_{\ ;p}$ y $A_{k;p}$ son tensores. Además, en un sistema galileano los símbolos de Christoffel son cero y por lo tanto la derivada covariante $A^k_{\ ;p}$ coincide con la derivada $\partial A^k/\partial x^p$.

Calculemos ahora la derivada covariante del tensor contravariante A^iB^k formado por los productos los vectores A^k y B^k,

$$\delta\left(A^iB^k\right) = A^i\delta B^k + B^i\delta A^k = -A^i\Gamma^k_{lm}B^l dx^m - B^k\Gamma^i_{lm}A^l dx^m.$$

De aquí se sigue que la aplicación del operador δ a cualquier tensor contravariante Π^{ik} de rango 2 está dada por

$$\delta\,\Pi^{ik} = -\left(\Pi^{im}\Gamma^k_{ml} + \Pi^{mk}\Gamma^i_{ml}\right)dx^l. \tag{44.8}$$

Por lo tanto

$$D\Pi^{ik} = d\Pi^{ik} - \delta\Pi^{ik} = \Pi^{ik}_{\ ;l}\,dx^l, \tag{44.9}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

en donde la derivada covariante $\Pi^{ik}{}_{;l}$ del tensor Π^{ik} está dada por

$$\Pi^{ik}{}_{;l} = \frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}\Pi^{mk} + \Gamma^k_{ml}\Pi^{im}. \tag{44.10}$$

De manera totalmente análoga se puede calcular la derivada covariante de los tensores $\Pi^i{}_k$ y Π_{ik} para obtener

$$\Pi^i{}_{k;l} = \frac{\partial \Pi^i{}_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}\Pi^m{}_k - \Gamma^m_{kl}\Pi^i{}_m. \tag{44.11}$$

$$\Pi_{ik;l} = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il}\Pi_{mk} - \Gamma^m_{kl}\Pi_{im}. \tag{44.12}$$

A partir de estas relaciones uno puede entonces calcular la derivada covariante de un tensor de rango n. Esta derivada está dada por la derivada del tensor con respecto a las coordenadas más n términos que son funciones lineales de la conexión, es decir,

$$\Omega^{\cdots}{}_{\cdots i\cdots}{}^{k\cdots}{}_{;l} = \frac{\partial}{\partial x^l}\Omega^{\cdots}{}_{\cdots i\cdots}{}^{k\cdots} + \ldots - \Gamma^m_{il}\,\Omega^{\cdots}{}_{\cdots m\cdots}{}^{k\cdots} + \ldots + \Gamma^k_{ml}\,\Omega^{\cdots}{}_{\cdots i\cdots}{}^{m\cdots} \tag{44.13}$$

Debido a que la aplicación del operador δ a un escalar ϕ es igual a cero, entonces la derivada covariante de un escalar es igual a la derivada con respecto a las coordenadas del escalar

$$\phi_{;l} = \frac{\partial \phi}{\partial x^l}. \tag{44.14}$$

Gracias a la linealidad del operador δ, la derivada covariante es también una función lineal,

$$(A^pB_q)_{;l} = B_qA^p{}_{;l} + A^pB_{p;l}. \tag{44.15}$$

Definamos a la *derivada contravariante* $()^{;l}$ de un vector B^p como

$$B^{p\,;l} = g^{lm}B^p{}_{;m}, \qquad B_p{}^{;l} = g^{lm}B_{p;m}. \tag{44.16}$$

En otras palabras, la derivada contravariante corresponde a subir el índice de derivación covariante.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Tarea 14

La cantidad DA^k *de la ecuación* (44.5) *es un vector contravariante y por lo tanto se transforma de acuerdo a la igualdad* (42.3)*, es decir,*

$$DA^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}(DA)'^i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\left\{\frac{\partial A'^i}{\partial x'^l} + \Gamma'^i_{ml}A'^m\right\}dx'^l. \tag{44.17}$$

(I) Utilizando el hecho de que

$$A'^m = \frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A^k, \qquad \frac{\partial}{\partial x'^l} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^l}\frac{\partial}{\partial x^m},$$

muestra que la ecuación (44.17) *toma la forma*

$$DA^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\left\{\frac{\partial x^m}{\partial x'^l}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n}A^n + \frac{\partial x^m}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\frac{\partial A^n}{\partial x^m} + \Gamma'^k_{ml}\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}A^s\right\}\frac{\partial x'^l}{\partial x^q}dx^q. \tag{44.18}$$

(II) Compara la ecuación (44.18) *con la relación* (42.3) *y muestra que*

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{rp}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^r}{\partial x^k}\frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \tag{44.19}$$

De aquí se ve que los símbolos de Christoffel se comportan como un tensor solamente cuando el segundo término del lado derecho de la ecuación se anula, es decir, cuando la transformación de un sistema coordenado a otro es lineal. Este segundo término es además simétrico en los índices k y l, por lo tanto las componentes del objeto $S^i_{kl} := \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk}$ se transforman como un tensor, es decir,

$$S^i_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k}\frac{\partial x'^t}{\partial x^l}S'^r{}_{st}. \tag{44.20}$$

Debido a que $S^i_{kl} = 0$ para un sistema galileano y utilizando la ecuación (44.20), es claro que el valor de este tensor es cero en cualquier otro sistema de coordenadas. Esto significa que

$$\Gamma^k_{lm} = \Gamma^k_{ml}, \tag{44.21}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

es decir, la conexión es simétrica en sus índices inferiores. En futuras aplicaciones escribiremos a los símbolos de Christoffel con todos sus índices abajo como

$$\Gamma_{klm} = g_{kp}\Gamma^{p}_{lm}. \tag{44.22}$$

El vector covariante DA_k está relacionado con el vector contravariante DA^k por la relación $DA_k = g_{kl}DA^l$, como sucede para cualquier vector. Debido a que $A_k = g_{kp}A^p$ entonces $DA_k = g_{kp}DA^p + A^pDg_{kp}$. Con esto se obtiene que $Dg_{kl} = 0$ o bien que la derivada covariante del tensor métrico es cero, es decir,

$$g_{kp;l} = 0. \tag{44.23}$$

Utilizando la ecuaciones (44.12) y (44.23) se obtiene que

$$\frac{\partial g_{pk;l}}{\partial x^l} = \Gamma_{kpl} + \Gamma_{pkl}, \qquad \frac{\partial g_{lp}}{\partial x^k} = \Gamma_{pkl} + \Gamma_{lpk}, \qquad -\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^p} = -\Gamma_{lkp} - \Gamma_{klp}.$$

La suma de estas tres ecuaciones nos da la relación entre los símbolos de Christoffel y el tensor métrico

$$\Gamma_{pkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{pl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^p}\right). \tag{44.24}$$

Utilizando la ecuación (44.22) podemos subir el índice de la relación (44.24) para obtener

$$\Gamma^{p}_{kl} = \frac{1}{2}g^{pm}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{44.25}$$

Estas dos últimas ecuaciones muestran que las derivadas del tensor métrico generan a los símbolos de Christoffel. Debido a que las cantidades g_{ik} representan al potencial gravitacional (cf. sección §40), entonces la cantidad Γ^{i}_{kl} es como "la fuerza" que se ejerce sobre una partícula de prueba que se mueve en un campo gravitacional.

Calculemos ahora la diferencial dg del determinante g del tensor métrico g_{kl}. El determinante de esta matriz está dado por

$$d\left(\det g_{ik}\right) = \left(dg_{00} \times \text{ menor de } g_{00}\right) + \left(dg_{01} \times \text{ menor de } g_{01}\right) + \ldots \tag{44.26}$$

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

Como la matriz formada por las cantidades g^{ik} es la matriz inversa de g_{ik} entonces g^{ik} es la matriz formada por los menores de g_{ik} dividida por el $\det g_{ik} = g$. Por lo tanto, los menores de la cantidad g_{ik} están dados por $g\, g^{ik}$. Con esto, la ecuación (44.26) se simplifica a

$$dg = d\left(\det g_{ik}\right) = g\, g^{ik}\, dg_{ik}. \tag{44.27}$$

Ahora bien, como $g_{ik}\, g^{ik} = \delta^p_p = 4$, entonces $g_{ik}\, dg^{ik} = -g^{ik} dg_{ik}$. De aquí que la ecuación (44.27) tome la forma

$$dg = d\left(\det g_{ik}\right) = -g\, g_{ik}\, dg^{ik}. \tag{44.28}$$

La contracción del primero y tercer índice de los símbolos de Christoffel está dada por

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right) = \frac{1}{2} g^{im}\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k}. \tag{44.29}$$

Dividiendo la ecuación (44.28) por dx^k se obtiene que $\partial g/\partial x^k = g g^{im}\partial g_{im}/\partial x^k$. Sustituyendo este valor en la ecuación (44.29) se obtiene que

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\ln\sqrt{-g}. \tag{44.30}$$

Tarea 15

(1) *La contracción de los índices inferiores en los símbolos de Christoffel está dada por*

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{44.31}$$

Para simplificar esta relación muestra primero que

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = g^{kl} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right), \tag{44.32}$$

$$\frac{\partial g^{il}}{\partial x^l} = -g^{kl} g^{im}\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}. \tag{44.33}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Con estas dos ecuaciones y utilizando la relación (44.27) *muestra que la ecuación* (44.31) *se escribe simplemente como*

$$g^{kl}\Gamma^{i}_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{l}}\left(\sqrt{-g}g^{il}\right). \tag{44.34}$$

(II) *Utilizando el hecho de que* $g_{il}g^{lk} = \delta^{k}_{i}$ *muestra que*

$$g_{il}\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^{m}} = -g^{lk}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^{m}}, \tag{44.35}$$

y por lo tanto, utilizando el hecho de que la derivada covariante del tensor métrico es cero –cf. ecuación (44.23)*, entonces*

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{l}} = -\Gamma^{i}_{ml}g^{mk} - \Gamma^{k}_{ml}g^{im}. \tag{44.36}$$

Esta última ecuación expresa la derivada del tensor métrico en función del mismo tensor métrico y la conexión.

(III) *Si* A^{k} *es un vector,* Π^{kl} *es un tensor antisimétrico y* Ω^{kl} *es un tensor simétrico, muestra que*

$$A^{p}{}_{;p} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{p}}\left(A^{p}\sqrt{-g}\right), \tag{44.37}$$

$$\Pi^{ik}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(\Pi^{ik}\sqrt{-g}\right) \tag{44.38}$$

$$\Omega_{i}{}^{k}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(\Omega_{i}{}^{k}\sqrt{-g}\right) - \frac{1}{2}\Omega^{kl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{i}}. \tag{44.39}$$

En coordenadas curvilíneas el divergente del vector A^{i} *se transforma en* $A^{i}{}_{;i}$*. Por lo tanto, la ecuación* (44.37) *representa al* divergente en coordenadas curvilíneas *del vector* A^{i}*. Es claro además que como* $A_{i;k} - A_{k;i} = \partial A_{i}/\partial x^{k} - \partial A_{k}/\partial x^{i}$*, entonces esta cantidad tiene la misma forma que en coordenadas cartesianas. Y como* $\partial A_{i}/\partial x^{k} - \partial A_{k}/\partial x^{i}$ *es un tensor antisimétrico, entonces* $A_{i;k} - A_{k;i}$ *es también un tensor antisimétrico.*

(IV) *En coordenadas galileanas, el Laplaciano* $\Delta\phi$ *de un escalar* ϕ *está dado por* $\partial^{2}\phi/\partial x^{k}\partial x_{k}$*.*

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

En coordenadas curvilíneas, esta cantidad se transforma en $\phi^{;k}{}_{;k}$. *Muestra que*

$$\Delta\phi = \phi^{;k}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right). \tag{44.40}$$

El teorema de Stokes visto en la sección §42 puede ser escrito en ocasiones de manera un poco más elegante utilizando las relaciones anteriores. En efecto, debido a que la integral sobre una hipersuperficie de tres dimensiones se transforma a una integral sobre el cuatro–volumen mediante la regla $dS_i \to d\Omega\, \partial/\partial x^i$ y por lo tanto

$$A^i dS_i \to d\Omega \frac{\partial A^i}{\partial x^i}, \text{ o bien, } \left(A^i\sqrt{-g}\right) dS_i \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}\left(A^i\sqrt{-g}\right).$$

Con esto y utilizando la ecuación (44.37) se obtiene el teorema de Gauss estándard en espacios curvos

$$\oint A^k\sqrt{-g}\, dS_k = \int A^k{}_{;k}\sqrt{-g}\, d\Omega \tag{44.41}$$

§45. Movimiento de una partícula

Como vimos en la sección §14, en relatividad especial, una partícula de masa m se mueve obedeciendo al principio de mínima acción. La partícula se mueve de tal forma que su acción S corresponde a un mínimo para trayectorias suficientemente pequeñas. Dicho de otro modo, la línea de universo de la partícula debe corresponder a un extremo entre dos puntos del espacio–tiempo, es decir,

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0, \tag{45.1}$$

Un campo gravitacional representa un cambio en la estructura del espacio–tiempo plano, es decir, representa un cambio en el intervalo ds. Por esta razón, la ecuación (45.1) es cierta también para una partícula que se mueve a lo largo de un campo gravitacional. En un campo gravitacional la trayectoria de la partícula se lleva acabo de tal forma que los puntos sobre esta misma alcanzan un extremo. Esta trayectoria se le denomina *geodésica*. En ausencia de campos gravitacionales, las geodésicas corresponden a líneas rectas que implica un movimiento uniforme y rectilíneo. Cuando se consideran campos gravitacionales, las

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

geodésicas no son trayectorias rectilíneas, sino que son trayectorias curvas (extremas) las cuales implican que el movimiento de la partícula es no–uniforme y no–rectilíneo.

Para calcular la ecuación de movimiento en un campo gravitacional, dada por la ecuación (45.1), generalicemos el resultado obtenido al variar la acción para el caso de un espacio plano en ausencia de campos gravitacionales. En relatividad especial la ecuación de movimiento de una partícula está dada por la ecuación (14.7), es decir, $du^i = 0$. Claramente esta relación debe transformarse a $Du^i = 0$ en el caso de un espacio curvo. El operador D está dado por la ecuación (44.5) y por lo tanto la trayectoria de la partícula en un campo gravitacional está dada por

$$du^i + \Gamma^i_{kl} u^k dx^l = 0.$$

Dividiendo esta última ecuación por ds y utilizando el hecho de que la velocidad $u^i = dx^i/ds$ se obtiene que

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{45.2}$$

Esta es la ecuación buscada y se denomina la *ecuación geodésica*. Geométricamente representa la trayectoria de longitud mínima entre dos puntos de un espacio curvo. Esta ecuación muestra que el movimiento de una partícula no se lleva a cabo de manera uniforme y rectilínea cuando esta última se mueve bajo la influencia de un campo gravitacional.

En componentes covariantes, la ecuación geodésica toma la forma $Du_i = 0$. Utilizando la ecuación (44.5) esta relación se transforma en

$$\frac{d^2x_i}{ds^2} - \Gamma_{ikl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{45.3}$$

Esta ecuación se reduce considerablemente utilizando la ecuación (44.24) para obtener

$$\frac{d^2x_i}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{45.4}$$

La cuatro–aceleración de una partícula de masa m está dada por du^i/ds. Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación (45.2), la cuatro–fuerza que se ejerce sobre esta partícula está dada por $-m\Gamma^i_{kl}u^k u^l$. Debido a que los símbolos de Christoffel están determinados por las derivadas del tensor métrico con respecto a las posiciones, podemos decir que las cantida-

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

des g_{ik} representan el "potencial" del campo gravitacional. Esto ya había sido percibido a través de la ecuación (40.7) en donde se mostró que la corrección relativista al campo gravitacional Newtoniano significa que $g_{00} \approx 1 + 2\phi/c^2$.

La ecuación (45.2) puede escribirse como

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}. \tag{45.5}$$

El lado derecho de esta ecuación tiene que ver con los campos gravitacionales y por lo tanto es una forma de describir la curvatura del espacio–tiempo. El lado izquierdo representa la aceleración o los movimientos de partículas materiales sobre un campo gravitacional. De aquí que "*la curvatura del espacio le indique a las masas como moverse*". Ésta es la interpretación geometrodinámica de la ecuación geodésica.

En el límite Newtoniano el Lagrangiano L de una partícula de masa m que se mueve en un espacio plano está definida en la ecuación (14.4). Si existe un campo gravitacional, el Lagrangiano de una partícula de prueba en este mismo límite toma la forma

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\phi, \tag{45.6}$$

en donde ϕ es el potencial escalar gravitacional. De esta manera, la acción S de una partícula que se mueve en un campo gravitacional está dada por

$$S = \int L\,dt = -mc\int\left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c}\right)dt. \tag{45.7}$$

Comparando esto con la ecuación (45.1), i.e. $S = -mc\int ds$, se obtiene que en el caso límite Newtoniano el intervalo está dado por

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c}\right)dt. \tag{45.8}$$

Elevando esta ecuación al cuadrado y despreciando términos que tienden a cero cuando $c \to \infty$ se obtiene que

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c^2dt^2 - dl^2. \tag{45.9}$$

En esta ecuación hemos escrito la velocidad de la partícula $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{l}/dt$. La ecuación (45.9)

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

muestra que la primera corrección relativista a la métrica del espacio–tiempo con gravitación es tal que

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}, \tag{45.10}$$

y que $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\zeta} = 0$. Esto ya había sido antes calculado por otro método en la sección §40.

§46. Ecuaciones del campo gravitacional

La manera en la que definimos el transporte paralelo de un vector fue pidiendo que este mismo fuera tal que cuando se efectuara la operación en un espacio infinitesimalmente pequeño con coordenadas galileanas, entonces las componentes del vector permanecerían fijas (cf. sección §44).

Consideremos un conjunto de puntos $x^i(s)$ en un espacio curvo que forman una línea cuyo elemento de arco es s. Debido a que $ds^2 = dx^i dx_i$, el vector tangente unitario a esta curva es $u^i = dx^i/ds$. Si esta línea es además una geodésica, entonces $Du^i = du^i - \delta u^i = 0$. Esto significa que $\delta u^i = du^i$. Al transportar paralelamente a si mismo al vector u^i que se encuentra en la posición x^i hasta la posición $x^i + dx^i$ se obtiene el vector $u^i + \delta u^i = u^i + du^i$. En otras palabras, el vector tangente u^i localizado en el punto x^i y trasladado paralelamente a si mismo a lo largo de una geodésica coincide con el vector tangente $u^i + du^i$ a la geodésica en el punto $x^i + dx^i$.

Geométricamente es claro[†] que al hacer un transporte paralelo de dos vectores, el "ángulo" entre ellos no varía. De aquí se sigue en particular que el ángulo entre un vector cualquiera v^k y el vector tangente a la curva u^k permanece igual cuando v^k es transportando paralelamente a lo largo de una geodésica. Esto significa que al transportar paralelamente a un vector a lo largo de una geodésica sus componentes no cambian.

Consideremos una variedad de dos dimensiones como la que se muestra en la Figura VI.3. Si el contorno cerrado ABCD está formado por geodésicas, entonces al transportar

[†]Algebraicamente también es claro, basta tomar dos vectores u^i y v^i y transportarlos paralelamente para obtener $u^i + \delta u^i$ y $v^i + \delta v^i$. Con esto es claro que $u^i v_i = (u^i + \delta u^i)(v_i + \delta v_i)$ despreciando términos de orden superior. De aquí se sigue de inmediato que el "ángulo" entre dos vectores cualesquiera u^i y v^i se conserva al hacer un transporte paralelo.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

paralelamente al vector 1 a lo largo del contorno se obtienen los vectores 2, 3, 4 y 5. El vector 5 es el resultado de efectuar el transporte paralelo del vector 1 en el contorno cerrado, partiendo desde el punto A. En el caso más general, el vector 1 y el vector 4 no coinciden entre si. Esto significa que en un espacio curvo el transporte paralelo de un vector a partir de un punto dado hasta otro, arroja un resultado distinto si el traslado se hace a lo largo de trayectorias diferentes.

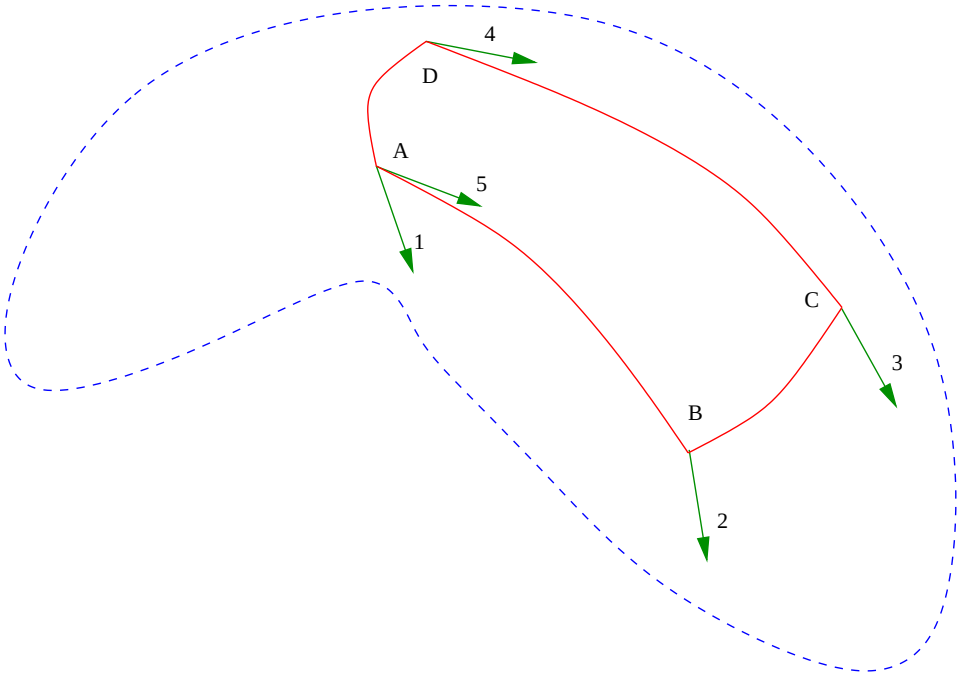

Figura VI.3: Sobre una variedad en dos dimensiones (línea punteada) se ha dibujado un contorno cerrado formado por geodésicas (línea continua). Sometamos al vector 1 a un transporte paralelo de A hasta B y luego hasta C, continuando hasta D para finalmente regresar a A. Debido a que el transporte paralelo de un vector sobre una geodésica preserva el ángulo con el vector tangente a la geodésica, entonces el vector 1 se transporta paralelamente hasta llegar al vector 2 en el punto B. Al transportar a este vector de B a C, éste se convierte en el vector 3. Al hacer el transporte paralelo del vector 3 que está localizado en C, este vector se transforma en el vector 4 al llegar al punto D. Finalmente al transportar paralelamente en si mismo el vector 4 desde el punto D hasta el punto A se obtiene el vector 5 que en términos generales, no coincide con el vector 1.

Supongamos ahora que un vector A_k es transportado paralelamente a lo largo de un

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

contorno de geodésicas cerrado infinitesimalmente pequeño. Al regresar a su posición original en el contorno, el vector A_k ha cambiado y tiene el valor $A_k + \Delta A_k$. Es claro que este cambio está dado por la integral $\oint \delta A_k$ tomada a lo largo del contorno cerrado. Con esto y debido a la ecuación (44.4) se obtiene que

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{ml} A_i dx^l. \tag{46.1}$$

Utilizando el teorema de Stokes (13.28) en esta última ecuación y debido a que el contorno es infinitesimalmente pequeño se obtiene aproximadamente que

$$\Delta A_k \approx \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\Gamma^i_{km} A_i\right) - \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\Gamma^i_{km} A_i\right)\right\} \Delta f^{lm}. \tag{46.2}$$

A primer orden de aproximación, como $DA_i = 0$ alrededor de un contorno cerrado, entonces la ecuación (44.5) implica que

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} \approx \Gamma^n_{il} A_n, \tag{46.3}$$

dentro del contorno de integración. Sustituyendo la ecuación (46.3) en la igualdad (46.2) se obtiene que

$$\Delta A_k \approx \frac{1}{2} R^i{}_{klm} A_i \Delta f^{lm}, \tag{46.4}$$

en donde el *tensor de curvatura* o *tensor de Riemann* $R^i{}_{klm}$ de rango cuatro está dado por

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \tag{46.5}$$

Las cantidades $R^i{}_{klm}$ forman un tensor. Esto se debe a que como el lado izquierdo de la ecuación (46.4) forma un vector, y Δf^{lm} es un tensor, entonces necesariamente $R^i{}_{klm}$ es un tensor.

Tarea 16

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

(I) *Si* A_i *es un vector covariante, define su segunda derivada covariante como* $A_{i;k;l} := (A_{i;k})_{;l}$ *y muestra mediante calculo directo que*

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m{}_{ikl}. \tag{46.6}$$

(II) *Muestra utilizando la ecuación* (46.6) *(o de alguna otra manera, por ejemplo mediante el cálculo directo) y la linealidad de la derivada covariante, que si* A_i *y* B_k *son dos vectores covariantes entonces*

$$(A_i B_k)_{;l;m} - (A_i B_k)_{;m;l} = A_n B_k R^n{}_{ilm} + A_i B_n R^n{}_{klm}. \tag{46.7}$$

De aquí concluye que todo tensor covariante Π_{ik} *satisface la relación*

$$\Pi_{ik;l;m} - \Pi_{ik;m;l} = \Pi_{nk} R^n_{ilm} + \Pi_{in} R^n{}_{klm}. \tag{46.8}$$

En el caso de un espacio plano, los símbolos de Christoffel son idénticamente iguales a cero y por lo tanto el tensor de Riemann es igual a cero en todo el espacio. Debido a que $R^i{}_{klm}$ es un tensor, entonces si $R^i{}_{klm} = 0$ en un sistema de referencia, este tensor será igual a cero en cualquier otro sistema de referencia. Esto quiere decir que cuando el espacio es plano, entonces $R^i{}_{klm} = 0$ en todo el espacio. Inversamente, si $R^i{}_{klm} = 0$ en todo el espacio entonces ΔA_k dado por la ecuación (46.4) es cero y por lo tanto el transporte paralelo de un vector alrededor de un contorno cerrado lo regresa a su misma posición. En otras palabras, localmente el espacio es plano y como esto mismo puede hacerse para cualquier punto del espacio, entonces el espacio en su totalidad es Euclidiano. Esto muestra que $R^i{}_{klm} = 0$ si y sólo si el espacio es plano.

En el caso de un espacio curvo uno puede hacer $\Gamma^i_{kl} = 0$ en una región suficientemente pequeña del espacio, pero las derivadas $\partial\Gamma^i_{kl}/\partial x^p$ no serán nulas en todo el espacio y por lo tanto R^i_{klm} no necesariamente es cero en todo el espacio.

Tarea 17

(I) *El tensor de Riemann con todos sus índices abajo está dado por* $R_{iklm} = g_{in} R^n{}_{klm}$.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Muestra que

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m}\right\} + g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right). \tag{46.9}$$

De la ecuación (46.9) se siguen *las propiedades de simetría* del tensor de Riemann

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml} = R_{lmik}. \tag{46.10}$$

Utilizando las propiedades de antisimetría que se muestran en la ecuación (46.10) se obtiene que cualquier componente que tenga los dos primeros índices repetidos, o los dos últimos índices repetidos es igual a cero. La ecuación (46.9) implica también que

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0. \tag{46.11}$$

En un sistema de coordenadas galileano, la derivada covariante $(\ )_{;k}$ se convierte en la derivada ordinaria $\partial/\partial x^k$ y los símbolos de Christoffel (pero no necesariamente sus derivadas) se anulan. Por lo tanto, en un sistema de coordenadas galileano

$$R^n{}_{ikl;m} = \frac{\partial R^n{}_{ikl}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \Gamma^n_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^n_{ik}}{\partial x^m \partial x^l}. \tag{46.12}$$

De esta manera se ve que

$$R^n{}_{ikl;m} + R^n_{imk;l} + R^n_{ilm;k} = 0, \tag{46.13}$$

para un sistema de referencia galileano. Sin embargo, debido a que $R^i{}_{klm}$ es un tensor, entonces la ecuación (46.13) es válida para cualquier espacio curvo. La relación (46.13) se conoce como la *identidad de Bianchi*.

Se define el *tensor de Ricci* R_{ik} como la contracción del primer y tercer índice del tensor de Riemann, es decir, utilizando la ecuación (46.5) este tensor está dado por

$$R_{ik} := g^{lm}R_{limk} = R^l{}_{ilk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}. \tag{46.14}$$

De esta última igualdad y la ecuación (44.30) se ve que el tensor de Ricci es simétrico, es decir,

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$R_{ik} = R_{ki}. \tag{46.15}$$

Finalmente definamos el *escalar de Ricci* o *la curvatura escalar del espacio* R como la contracción del tensor de Ricci, es decir,

$$R := R^i_i = g^{il} g^{km} R_{iklm} = R^{ik}{}_{ik}. \tag{46.16}$$

Puede mostrarse que la curvatura del espacio–tiempo es proporcional al escalar de Ricci (cf. sección §47 como ejemplo en el caso de espacios isotrópicos). Utilizando la definición del escalar de Ricci de la ecuación (46.16) y la identidad de Bianchi se sigue que el divergente del tensor de Ricci en coordenadas curvilíneas está dado por

$$R^l{}_{m;l} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^m}. \tag{46.17}$$

Lo que falta ahora es utilizar el principio de mínima acción para encontrar las ecuaciones del campo gravitacional. Esto se hace de la misma manera que como lo hicimos para encontrar el segundo par de ecuaciones de Maxwell en la sección §17. En el caso de campos gravitacionales, esto no es tan directo y requiere cálculos que van un poco más allá de nuestros objetivos en este curso. Por lo tanto únicamente mencionaremos los pasos básicos para encontrar estas ecuaciones.

El principio de mínima acción aplicado a campos nos dice que la variación δS de la acción total S es tal que

$$\delta S = \delta \left(S_m + S_f + S_{mf} \right) = 0, \tag{46.18}$$

en donde S_m es la acción correspondiente a las partículas materiales que se mueven sobre el campo gravitacional dado y está dada por la ecuación (45.1). La acción S_f es la acción del campo gravitacional y S_{mf} es la acción que representa a la interacción de las partículas materiales con el campo. Como mencionamos en el capítulo III, suponemos que la acción $\delta S_m = 0$ –pues esta condición representa la trayectoria de las partículas (que se supone ya conocida) dado el campo gravitacional. Es un resultado básico de la relatividad general, pero complicado, el mostrar que

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$\delta S_{mf} = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega, \tag{46.19}$$

$$\delta S_{f} = -\frac{c^3}{16\pi G}\int \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega, \tag{46.20}$$

donde las integrales son tomadas sobre todo el espacio–tiempo. Sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en la variación de la acción (46.18) con $\delta S_m = 0$, se obtiene que

$$-\frac{c^3}{16\pi G}\int \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = 0. \tag{46.21}$$

Debido a que la métrica fue escogida de manera arbitraria, entonces la variación de la misma, i.e. δg^{ik}, es también arbitraria y por lo tanto necesariamente se obtiene que el término entre paréntesis dentro de la integral (46.21) es idénticamente igual a cero, es decir,

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}, \tag{46.22}$$

que son las ecuaciones diferenciales que satisface la métrica g_{ik} (o el campo gravitacional), y se denominan frecuentemente como las *ecuaciones de Einstein*.

El lado derecho de la ecuación (46.22) es el tensor de energía–momento y vagamente podemos decir que representa a las masas del sistema. El lado izquierdo de esta misma ecuación está formado por cantidades que son funciones de la curvatura del espacio–tiempo. Las ecuaciones de Einstein nos dicen que la curvatura del espacio–tiempo y las masas están relacionadas de la manera particular que se muestra en la ecuación (46.22). Mas aun, esta relación nos está diciendo que "*las masas (lado derecho de la ecuación* (46.22)*) le dicen al espacio–tiempo como curvarse (lado izquierdo de la ecuación* (46.22)".

Combinando la interpretación de la ecuación geodésica vista en la sección §45 con lo interpretado por las ecuaciones de Einstein, podemos decir entonces que: "*las masas le dicen al espacio como curvarse (ecuaciones de Einstein) y la curvatura del espacio le dice a las masas como moverse (ecuación geodésica)*"[†]. Esta acción–reacción entre

[†]En el caso del electromagnetismo, el equivalente a la ecuación geodésica es la fuerza de Lorentz y el equivalente a las ecuaciones de Einstein, son las ecuaciones de Maxwell. En este caso uno puede decir que la distribución en el espacio de las cargas le dice a los campos electromagnéticos como comportarse

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

el espacio–tiempo y las masas es de suma importancia y resulta tan compleja que las ecuaciones de Einstein no son lineales. Esto significa que el principio de superposición no es válido en relatividad general. En otras palabras, si g_{ik} y g'_{ik} son dos métricas que son soluciones a las ecuaciones de Einstein, entonces la suma $g_{ik} + g'_{ik}$ no es necesariamente una solución de las ecuaciones de Einstein.

Las ecuaciones de Einstein con uno de sus índices arriba toman la forma

$$R^k_i - \frac{1}{2} R \delta^k_i = \frac{8\pi G}{c^4} T^k_i. \tag{46.23}$$

La contracción de esta ecuación es

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T^i_i, \tag{46.24}$$

y por lo tanto, sustituyendo este valor en la ecuación (46.22) se obtiene otra forma para las ecuaciones de Einstein

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} T^p{}_p \, g_{ik} \right). \tag{46.25}$$

El divergente generalizado (contracción de la derivada covariante) de la ecuación (46.23) está dado por

$$R^k{}_{i;k} - \frac{1}{2} R_{;k} = \frac{8\pi G}{c^4} T^k{}_{i;k}. \tag{46.26}$$

Utilizando la ecuación (46.17) obtenemos entonces que la divergencia en coordenadas curvilíneas del tensor de energía–momento es idénticamente igual a cero, es decir,

$$T^i{}_{k;i} = 0. \tag{46.27}$$

Esta última relación es clara, pues al transformar a un sistema de coordenadas curvilíneo la ecuación (19.6) que debe satisfacer el tensor de energía–momento en un espacio plano, se debe obtener la ecuación (46.27).

En ausencia de campos y materia, i.e. en el vacío, la ecuación (46.26) implica que

(ecuaciones de Maxwell) y la intensidad de los campos electromagnéticos le dice a las cargas como moverse (ecuación de Lorentz).

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$R_{ik} = 0$. Esto no necesariamente significa que el espacio–tiempo es plano pues para tal condición es necesario que el tensor de Riemann $R^{i}{}_{klm}$ sea idénticamente igual a cero en todo el espacio.

§47. Espacios isotrópicos curvos

A manera de ejemplo y con la idea de aplicar los resultados obtenidos en esta sección a cosmología, calculemos la métrica para espacios isotrópicos curvos, es decir, de curvatura constante. De hecho, un espacio isotrópico es necesariamente homogéneo. En efecto, si cada punto del espacio se ve igual que cualquier otro en todas las posibles direcciones, entonces dada una dirección especial el espacio se verá igual en cualquier punto sobre una trayectoria que represente esta dirección.

Comencemos por encontrar la métrica del espacio isotrópico más simple que existe, la esfera. La manera más simple de encontrar las propiedades de este espacio de dos dimensiones es sumergiéndolo en un espacio de una dimensión mayor, es decir, de tres dimensiones. Esto se muestra en la Figura (VI.4). Sobre la superficie de la esfera definamos dos coordenadas, ρ y φ. La coordenada ρ corresponde a la distancia medida desde el polo norte de la esfera hasta un determinado punto P. Esta distancia corresponde a la longitud de una geodésica medida desde el polo norte y las geodésicas en una esfera corresponden a segmentos de círculos con origen en el centro de la esfera. La coordenada φ es el ángulo azimutal.

De la Figura VI.4 se ve que un elemento de longitud dl sobre la superficie de la 2–esfera medido a partir del punto P está dado por $dl^2 = d\rho^2 + d\zeta^2$. Si θ es el ángulo polar, es claro entonces que $d\rho = R_c d\theta$ y que $d\zeta = R_c \sin\theta\, d\varphi$. Por esta razón el elemento de longitud sobre la superficie de la 2–esfera está dado por

$$dl^2 = R_c^2 d\theta^2 + R_c^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{47.1}$$

Una variedad cualquiera de dos dimensiones puede aproximarse localmente a la superficie de la 2–esfera. Si R_c es el radio de la esfera que aproxima a la superficie, i.e. el radio de curvatura de la superficie evaluada en el punto de aproximación, entonces la métrica de la variedad de dos dimensiones está dada por la ecuación (47.1). Cuando el espacio es

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

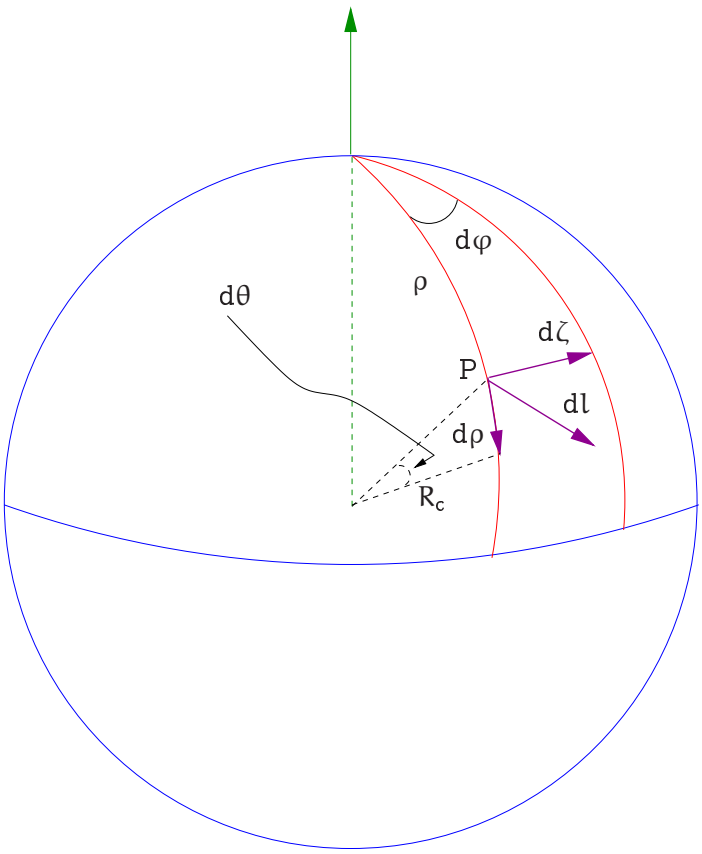

Figura VI.4: Sobre la 2–esfera se definen dos coordenadas, ρ y φ. La coordenada ρ es medida a partir del polo norte y se mueve sobre un circulo máximo hacia abajo como lo muestra la figura. La coordenada φ corresponde al ángulo azimutal. La coordenada θ es el ángulo polar y R_c es el radio de la esfera. Dado un punto P sobre la esfera, el elemento de longitud dl de la misma está dado por $dl^2 = d\rho^2 + d\zeta^2$.

isotrópico el radio de curvatura es una constante en todo el espacio.

Escribamos la métrica (47.1) de manera diferente introduciendo la *coordenada de la medida de la distancia* χ definida por

$$\chi := R_c \sin\left(\frac{\rho}{R_c}\right). \tag{47.2}$$

Con esto, la ecuación (47.1) toma la forma

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$dl^2 = \frac{d\chi^2}{1-\kappa\chi^2} + \chi^2 d\varphi^2, \tag{47.3}$$

en donde la curvatura Gaussiana o curvatura escalar κ de la esfera está dada por $\kappa = 1/R_c^2$. El elemento de distancia $\chi d\varphi$ es ortogonal al elemento de distancia $d\rho$ como lo muestra la ecuación (47.3). Por lo tanto, la *distancia diametral angular* $\chi d\varphi$ representa la longitud de un segmento de línea que subtiende un ángulo φ a la distancia ρ.

Consideremos ahora un espacio isotrópico de tres dimensiones. Las coordenadas naturales a utilizar son la coordenada radial ρ, el ángulo polar θ y el ángulo azimutal φ. Cualquier superficie de dos dimensiones contenida en un espacio de tres dimensiones isotrópico es también isotrópica y su métrica está dada por la ecuación (47.3). En coordenadas esféricas cualquier desplazamiento angular $d\Omega$ en la dirección ortogonal a la dirección radial está dado por[†]

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2, \tag{47.4}$$

Con esto y generalizando la ecuación (47.1), el elemento de longitud para un espacio de tres dimensiones isotrópico está dado por

$$dl^2 = d\rho^2 + R_c \sin^2\left(\frac{\rho}{R_c}\right) d\Omega^2 = \frac{d\chi^2}{1-\kappa\chi^2} + \chi^2 d\Omega^2. \tag{47.5}$$

La métrica de Minkowski para cualquier espacio curvo isotrópico queda entonces determinada de la siguiente manera

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\rho^2 - R_c \sin^2\left(\frac{\rho}{R_c}\right) d\Omega^2 = c^2dt^2 - \frac{d\chi^2}{1-\kappa\chi^2} - \chi^2 d\Omega^2. \tag{47.6}$$

Otra manera de encontrar la métrica del 3–espacio isotrópico, descrita por la ecuación (47.5) es la siguiente. La métrica del 3–espacio está dada por la relación (43.8). Debido a la isotropía del espacio, el tensor de Riemann ${}^{(3)}R^{\alpha}{}_{\beta\eta\theta}$ del tres espacio debe ser únicamente expresable en términos de tensores que no dependan del lugar donde se encuentren y/o que tengan una dirección privilegiada. Los dos tensores que satisfacen esta condición son el tensor de Levi–Civita $\epsilon_{\alpha\beta\eta}$ y el tensor métrico $\gamma_{\alpha\beta}$. Puede mostrarse que el tensor

[†] ¡Cuidado! En esta notación Ω no representa al ángulo sólido. Aquí Ω es un desplazamiento angular que ocurre en tres dimensiones, es decir, un desplazamiento angular sobre un ángulo sólido dado.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

de Riemann de un espacio isotrópico depende únicamente del tensor métrico y por lo tanto tiene la forma

$$^{(3)}R_{\alpha\beta\eta\theta} = \kappa\left(\gamma_{\alpha\eta}\gamma_{\beta\theta} - \gamma_{\alpha\theta}\gamma_{\eta\beta}\right), \tag{47.7}$$

en donde κ es la curvatura del tres espacio como veremos más adelante. Sin embargo esto es claro puesto que el tensor de Ricci en este caso está dado por $R_{\alpha\beta} = 2\kappa\gamma_{\alpha\beta}$ y por lo tanto el escalar de Ricci (o la curvatura escalar) está dada por

$$R = 6\kappa. \tag{47.8}$$

Para calcular la métrica del 3-espacio isotrópico consideremos una analogía. Identifiquemos al tres–espacio con una hiperesfera sumergida en un espacio de cuatro dimensiones. Esto es como el mapeo uno a uno de todos los puntos del plano euclidiano a la superficie de la dos esfera que se utiliza extensamente en el estudio de la variable compleja. La hiperesfera tiene un radio de curvatura R_c positiva y su ecuación analítica satisface la igualdad

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R_c^2, \tag{47.9}$$

en donde x_1, x_2, x_3, y x_4 representan coordenadas del cuatro espacio. Cabe hacer notar que este cuatro espacio no tiene nada que ver con el espacio–tiempo. Es simplemente un cuatro–espacio euclidiano con signatura $(+,+,+,+)$ cuya métrica está dada por

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \tag{47.10}$$

Sustituyendo la relación (47.9) en la igualdad (47.10) se obtiene la métrica de la 3–esfera

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{\left(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3\right)^2}{R_c^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \tag{47.11}$$

Ahora bien, debido a que el tensor de Ricci $^{(3)}R_{\alpha\beta}$ tiene la misma forma en todo el tres–espacio isotrópico, entonces basta con calcularlo en algún punto, digamos cerca del origen en donde $R_c^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \approx R_c^2$. Así, la ecuación (47.11) implica que el tensor métrico cerca del origen está dado por

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{R_c^2}. \tag{47.12}$$

De esta ecuación se sigue que la primera y segunda derivada del tensor métrico $\gamma_{\alpha\beta}$ evaluadas en el origen están dadas respectivamente por

$$\left.\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda}\right|_{\text{origen}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} = \frac{1}{R_c^2}\left(\delta_{\nu\alpha}\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\beta\nu}\delta_{\lambda\alpha}\right). \tag{47.13}$$

Utilizando las ecuaciones (47.12)-(47.13) se sigue que los símbolos de Christoffel (44.25) evaluados en el origen satisfacen las siguientes expresiones

$$\Gamma_{\alpha\beta\eta} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\eta}}{\partial x_\lambda} = \frac{\gamma_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\eta}}{R_c^2}. \tag{47.14}$$

Con esto, el tensor de Ricci dado (46.14) evaluado cerca del origen está dado por

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{R_c^2}\left(\gamma_{\eta\eta}\delta_{\alpha\beta} - \gamma_{\eta\alpha}\delta_{\eta\beta}\right), \tag{47.15}$$

y por lo tanto el tensor de Ricci evaluado en el origen está dado por

$$\left.R_{\alpha\beta}\right|_{\text{origen}} = \frac{2\delta_{\alpha\beta}}{R_c^2}. \tag{47.16}$$

A partir de la ecuación (47.16) se sigue que el escalar de Ricci está dado por $R = 6/R_c^2$. Comparando esto con la relación (47.8) se sigue entonces que

$$\kappa = \frac{1}{R_c^2}, \tag{47.17}$$

es decir, κ representa la curvatura gaussiana del 3–espacio κ y R_c el radio de curvatura.

En lugar de trabajar con coordenadas cartesianas x_1, x_2, x_3 y x_4 utilicemos coordenadas "esféricas" χ, θ, y φ definidas por

$$x_1 = \chi \sin\theta \cos\varphi, \qquad x_2 = \chi \sin\theta \sin\varphi, \qquad x_3 = \chi \cos\theta. \tag{47.18}$$

Para convertir el elemento de longitud (43.7) a estas coordenadas esféricas, notemos antes que este elemento puede reescribirse como

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$dl^2 = dx_\alpha dx_\alpha + \frac{(x_\alpha dx_\alpha)^2}{R_c^2 - x_\alpha x_\alpha} = (d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r})^2 + \frac{(\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r})^2}{R_c^2 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}\,, \tag{47.19}$$

con $\mathbf{r}$ el vector posición. Debido a que el lado derecho de la relación (47.19) es una expresión vectorial, esta misma es válida en cualquier sistema de coordenadas. Por ejemplo, en el sistema de coordenadas esféricas de la ecuación (47.18) para el cual $d\mathbf{r} = \boldsymbol{e}_\chi d\chi + \boldsymbol{e}_\theta \chi d\theta + \boldsymbol{e}_\varphi \chi \sin\theta d\varphi$ se obtiene entonces que el intervalo de longitud espacial en coordenadas esféricas para un 3–espacio isotrópico está dado por

$$dl^2 = \frac{d\chi^2}{1 - r^2/R_c^2} + \chi^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{47.20}$$

que coincide con la ecuación (47.5).

A pesar de que la ecuación (47.20) fue obtenida para un espacio isotrópico de curvatura positiva, mediante una continuación analítica puede hacerse valido para cualquier espacio de curvatura negativa o cero.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Capítulo VII

Agujeros negros

La primera aplicación de la relatividad general fue hecha para describir el espacio–tiempo generado por una masa puntual. Esto equivale a encontrar el campo gravitacional descrito por una masa puntual en mecánica Newtoniana. De manera natural esta solución predice la existencia de objetos gravitacionales causalmente desconectados del espacio los cuales poseen una densidad infinitamente grande. Estos objetos, para los cuales ni siquiera la luz escapa de ellos, son de suma importancia en la física teórica. Astrofísicamente hablando, estos *agujeros negros* resultan dar origen a los fenómenos más energéticos que conocemos en el universo.

§48. Métrica de Schwarzschild

Un año después de la publicación de la teoría de la relatividad general por Einstein, la primera solución a las ecuaciones del campo gravitacional fue encontrada. En 1916, Schwarzschild encontró la solución exacta (la métrica g_{ik}) descrita por una masa puntual –el equivalente a la ley de Newton de gravitación universal para una masa puntual. Más tarde, Birkhoff mostró que si se considera una estrella idealizada tal que esta misma pueda considerarse como una bola homogénea de , i.e. fluido con presión idénticamente igual a cero, entonces el espacio–tiempo fuera de la estrella está descrito por la métrica de Schwarzschild. Esto es el equivalente del teorema de Newton para una masa homogénea con simetría radial (cf. sección §6) y se le conoce como el *teorema de Birkhoff*.

El campo gravitacional con simetría central se refiere no únicamente al campo estático

producido por una distribución con simetría central. La métrica debe ser también válida para cualquier movimiento que la materia central tenga siempre y cuando lo haga de manera simétricamente radial. Tal movimiento puede llevarse a cabo siempre y cuando la velocidad de cada partícula que conforma la masa en cuestión sea llevada a lo largo de la dirección radial.

La métrica que describe al campo gravitacional descrita por Schwarzschild está dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - 2GM/rc^2)} - r^2 d\Omega^2. \tag{48.1}$$

en donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ es el cuadrado del elemento de ángulo Ω que se lleva a cabo a un radio fijo r. Las coordenadas esféricas r, θ y φ son adecuadas para un observador que se localiza lejos del origen $r = 0$.

De la ecuación (48.1) se sigue que un intervalo de tiempo $\Delta\tau$ está dado por $\sqrt{(1 - 2GM/rc^2)}\Delta t$. Este calculo ya había sido hecho en el capítulo anterior y vimos que el intervalo de tiempo medido por relojes sincronizados está justamente dado por este valor. Además, debido a que $g_{0i} = 0$ en la métrica de Schwarzschild, entonces es posible sincronizar todos los relojes que se encuentren en cada punto de este espacio–tiempo (cf. sección §43). En otras palabras, la métrica de Schwarzschild toma en cuenta de manera exacta la sincronización de relojes a lo largo del espacio–tiempo curvilíneo producido por una distribución de materia simétricamente esférica. Cabe hacer notar también que la coordenada r no representa la distancia radial como lo haría en el caso de un espacio Euclídeo. De hecho, la *distancia propia* –la geodésica del punto r al centro de la distribución de masa– está dada por

$$\int_0^r \frac{dr}{(1 - 2GM/rc^2)}.$$

Por otra parte, comparación directa entre el intervalo espacial de la métrica de Schwarzschild (48.1) y el correspondiente para espacios curvos isotrópicos de Minkowski dado por la ecuación (47.6) implica que podemos escribir la curvatura $\kappa = 2GM/r^3c^2$ localmente. Ahora bien, como la curvatura κ es igual al inverso del cuadrado del radio de curvatura R_c^2, entonces podemos escribir

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$\frac{r^2}{R_c^2} = \frac{2GM}{rc^2},$$

que es el parámetro gravitacional χ que habíamos definido al principio del capítulo anterior. De aquí se sigue que el radio de curvatura decrece –curvatura del espacio aumenta– a distancias más cercanas del centro de la distribución de masas central. Evidentemente, si el sistema que produce las masas es suficientemente *compacto*[†] la curvatura del espacio–tiempo es notablemente fuerte y justamente es para estos objetos donde una descripción relativista dada por la métrica de Schwarzschild debe ser utilizada.

En unas secciones más discutiremos que es un agujero negro y como la métrica de Schwarzschild automáticamente predice la existencia de los mismos. No obstante, es importante mencionar la manera en que el Rev. británico John Mitchell en 1783 predijo la existencia de objetos gravitacionales invisibles para cualquier observador externo, es decir, objetos para en los cuales la luz no escapa. Para esto, consideremos la velocidad de escape de la superficie de un objeto gravitacional de masa M. Esta se define como la velocidad necesaria v que una masa m de prueba –como un cohete– necesita para llegar a infinito. En otras palabras, la energía total E_{tot} de esta masa de prueba debe ser nula: $E_{tot} = mv^2/2 - GmM/r = 0$, siendo r el radio del objeto gravitacional de masa M. Si la velocidad de escape necesaria para salir de este objeto es justamente la velocidad de la luz (recuerda que desde tiempos de Newton ya se pensaba que la gravedad debía también alterar las trayectorias de los fotones) entonces $2GM/rc^2 = 1$. El número $2GM/c^2 := r_S$ se denomina *radio gravitacional* o *radio de Schwarzschild* . De esta forma, los objetos que poseen radios $r < r_S$ aparecen oscuros para cualquier observador externo, pues ni siquiera la luz puede escapar de los mismos. Fue 200 años más tarde cuando John Wheeler en la Universidad de Princeton, en la década de los 1960's bautizó a estos objetos con el término de *agujeros negros*. Ya tendremos más oportunidad de hablar más con respecto a estos objetos, pero concentrémonos por el momento en analizar las propiedades de la métrica de Schwarzschild.

[†]En lo sucesivo denominaremos objetos compactos a todo aquel objeto astronómico para el cual los efectos relativistas del campo gravitacional que produce son importantes. En otras palabras, estos son objetos que poseen una masa compactada en un volumen lo suficientemente pequeño como para que la curvatura del espacio–tiempo producida por los mismos sea significante. Ejemplos de estos objetos son las estrellas de neutrones (observadas como pulsares) y los agujeros negros de todos tamaños: atómicos, estelares y supermasivos.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

§49. Órbitas alrededor de objetos compactos

Sabiendo el valor del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ dado por la ecuación (48.1) es fácil calcular las ecuaciones de movimiento que deben cumplir partículas de prueba que se mueven bajo la influencia gravitacional del objeto central. Basta sustituir los valores de g_{ik} en la ecuación geodésica $Du^i = 0$ (cf. ecuación (45.2)). No obstante, hagamos el cálculo de una manera directa utilizando nuestros conocimientos de mecánica Lagrangiana.

Recordemos que la acción $S = -mc\int ds$ (cf. sección §45), puede reescribirse como $S = -mc\int \sqrt{(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)}d\tau$ en donde $\dot{[\,]}$ representa a la derivada con respecto al tiempo propio $d\tau := ds/c = g_{00}\,dx^0/c$. El pedir que la variación $\delta S = 0$ es equivalente a pedir que $\delta\int \mathbb{G}(x^k,\dot{x}^k)d\tau = 0$, donde $\mathbb{G}(x^k,\dot{x}^k) := \sqrt{(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)} = c$. De tal manera que podemos identificar a la función $\mathbb{G}$ con el lagrangiano del sistema. Así pues, las ecuaciones de movimiento están dadas por las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathbb{G}}{\partial\dot{x}^k}\right) = \frac{\partial\mathbb{G}}{\partial x^k}, \tag{49.1}$$

en donde

$$\mathbb{G} := \left\{\alpha c^2\dot{t}^2 - \dot{r}^2/\alpha - -r^2\dot{\theta}^2 - r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right\}^{1/2}. \tag{49.2}$$

Sin embargo, debido a que el funcional G no depende explícitamente de θ y φ, entonces es claro que la cantidad[†] $\mathbf{r}\wedge\dot{\mathbf{r}} = \text{const}$. Debido a esto, es claro que el movimiento de la partícula en cuestión se lleva a cabo en un plano, el plano definido por el producto vectorial $\mathbf{r}\wedge\dot{\mathbf{r}}$. Por simplicidad, de ahora en adelante escogemos el plano definido por el valor fijo del ángulo polar $\theta = \pi/2$. De esta manera, al calcular la dependencia variacional de la función $\mathbb{G}$ con $\theta = \pi/2$ se obtiene únicamente

$$\mathbb{G} = \left\{\alpha c^2\dot{t}^2 - \dot{r}^2/\alpha - r^2\dot{\varphi}^2\right\}^{1/2} \tag{49.3}$$

donde $\alpha := (1 - r/r_S)$. Sustituyendo la ecuación (49.3) en las ecuaciones de Euler–Lagrange se obtiene que $\partial\mathbb{G}/\partial t = 0$, es decir, la cantidad $\partial\mathbb{G}/\partial t = \text{const}$. De aquí y sustituyendo el

[†]En mecánica Newtoniana la cantidad $\mathbf{r}\wedge\dot{\mathbf{r}}$ representa el momento angular específico. Evidentemente este producto vectorial no corresponde al momento angular específico de una partícula de prueba en relatividad, en donde este mismo está definido por $\gamma\mathbf{r}\wedge\dot{\mathbf{r}}$.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

valor de $\mathbb{G} = c$ en el resultado se obtiene que

$$\alpha \dot{t} = \text{const} := k \tag{49.4}$$

En todo sistema mecánico estacionario en la coordenada temporal (i.e. $\partial/\partial t = 0$) la energía es una cantidad conservada. Así pues, podemos identificar a la energía con la constante k de la ecuación (49.4).

Por otra parte, las ecuaciones de Euler–Lagrange implican que $\partial\mathbb{G}/\partial\dot{\varphi}$ es una cantidad conservada. De aquí que

$$r^2\dot{\varphi} = \text{const} := h. \tag{49.5}$$

La cantidad h es proporcional al momento angular especifico del sistema. Sustituyendo las ecuaciones (49.4)-(49.5) en la relación (49.3) se obtiene que

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\alpha(r\dot{\varphi})^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{mc^2}{2}(k^2 - 1). \tag{49.6}$$

Esta ecuación es muy similar a la que se obtiene en mecánica Newtoniana

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\varphi})^2 - \frac{GMm}{r} = E_{\text{tot}}. \tag{49.7}$$

De aquí que podamos identificar a la energía total del sistema en el caso relativista como el lado derecho de la ecuación (49.6). Cabe hacer notar que la diferencia principal entre el caso relativista y el no–relativista es el factor de α que aparece multiplicando a la velocidad angular de la partícula de prueba. Expandiendo la ecuación (49.6) obtenemos

$$m\dot{r}^2 + m\frac{h^2}{r^2} - \frac{2GMm}{r} - \frac{2GMmh^2}{r^3c^2} = mc^2(k^2 - 1). \tag{49.8}$$

Para entender el significado de esta relación, comparémosla con su equivalente Newtoniano

$$m\dot{r}^2 + m\frac{h^2}{r^2} - \frac{2GMm}{r} = m\dot{r}_\infty^2, \tag{49.9}$$

donde $\dot{r}_\infty$ es la velocidad de la partícula de prueba en infinito. Aparte de las diferencias entre el significado de las coordenadas entre ambas ecuaciones, el término adicional $-2GMh^2/r^3c^2$ en la ecuación relativista hace una gran diferencia en ambos casos. Este

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

término representa un potencial atractivo que se incrementa fuertemente a medida que se alcanzan distancias cercanas a las masas que producen el campo gravitacional. Para analizar en detalle esta diferencia, escribamos la ecuación (49.9) como

$$\dot{r}^2 = -c^2 \left\{ \frac{\eta}{(r/r_S)^2} - \frac{1}{(r/r_S)} \right\} + \dot{r}_\infty^2, \tag{49.10}$$

donde la cantidad adimensional $\eta := h^2/r_S^2c^2$. El término entre corchetes representa un potencial Φ constituido por dos partes, un potencial centrifugo proporcional a $1/r^2$ y un potencial gravitacional Newtoniano proporcional a $-1/r$. La variación del potencial Φ como función de r/r_S se muestra en la Figura VII.1. Si una partícula de prueba es soltada desde infinito (punto A') con una velocidad radial nula, entonces la posible trayectoria de la misma puede ocurrir a lo largo de la curva mostrada hasta alcanzar el punto A. Justamente en el punto A, la partícula tiene una radial velocidad nula y no es posible para la misma alcanzar el origen de coordenadas. Las trayectorias cerradas están dadas cuando $\dot{r}_\infty^2$ es negativo y así la partícula puede moverse entre los puntos B y B' sobre la curva. Las órbitas hiperbólicas corresponden a valores positivos de $\dot{r}_\infty^2$ y están representadas por los puntos debajo del eje horizontal en el diagrama. El punto de máximo acercamiento al origen de coordenadas ocurre en el punto C que corresponde al punto en el que la velocidad radial $\dot{r} = 0$.

De la misma manera, para el caso relativista, la ecuación (49.8) puede escribirse como

$$\dot{r}^2 - c^2(k^2 - 1) = -c^2 \left\{ \frac{\eta}{(r/r_S)^2} - \frac{1}{(r/r_S)} - \frac{\eta}{(r/r_S)^3} \right\} \tag{49.11}$$

El análisis es muy parecido al hecho para el caso Newtoniano. Sin embargo, el término proporcional a $-1/r^3$ actúa como un potencial centrifugo atractivo que se incrementa más rápido con el decremento de r que como lo hace el término centrífugo repulsivo que es proporcional a $1/r^2$. Por lo tanto, cuando la partícula alcanza regiones suficientemente cercanas a $r = 0$, este término centrifugo atractivo debe ser dominante sobre el comportamiento de la misma. En otras palabras, una partícula que se acerca lo suficiente al centro del campo gravitacional es capaz de alcanzar el origen del mismo. Para analizar con un poco más de detalle este hecho, el potencial Φ (definido por el término entre corchetes de la ecuación (49.11)), se muestra como función de r/r_S en la Figura VII.2. Algunas de

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

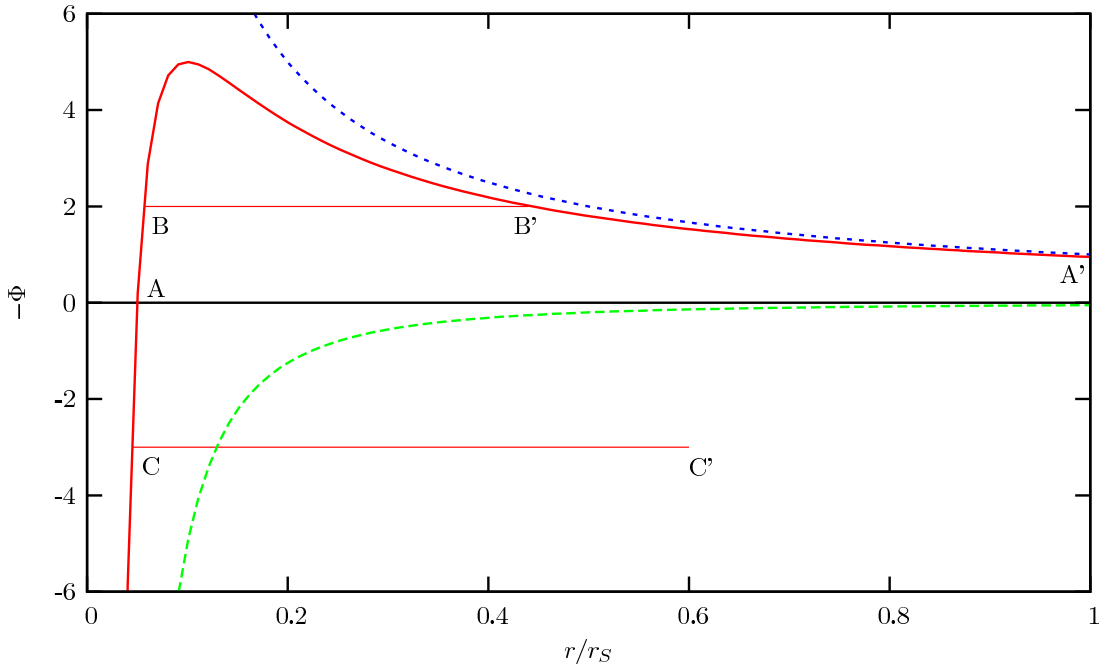

Figura VII.1: Variación del potencial gravitacional y centrifugo Φ (ver texto) en un campo gravitacional Newtoniano como función del radio r (eje horizontal) medido en unidades del radio gravitacional r_S. Las curvas mostradas en la gráfica corresponden a las funciones $-\eta r_S^2/r^2$, $-\Phi$ y r_S/r de abajo hacia arriba respectivamente.

las posibles trayectorias, que son funciones de η muestran que existen situaciones peculiares y distintas al comportamiento no–relativista. La trayectoria de una partícula que deja el reposo en A' y alcanza el punto A' es similar al caso Newtoniano. Justo en A, la velocidad de la partícula es puramente angular. La diferencia es que existen valores de η suficientemente pequeños los cuales hacen que una partícula que se deja en reposo radial solamente desde infinito sea capaz de alcanzar el origen. El caso límite entre estos dos casos está dado por la trayectoria de A' a D. A pesar de que la partícula alcanza la posición D con velocidad radial nula, es capaz de alcanzar el origen $r = 0$. Existen partículas que tienen trayectorias cerradas elípticas (correspondientes a $k^2 - 1 < 0$) como el segmento de la curva que se muestra entre los puntos B y B'. A medida que η decrece estos dos puntos convergen a un punto de inflexión E de la curva para el cual la trayectoria es una circunferencia que corresponde a la *última órbita estable* alrededor de un agujero negro.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Las órbitas hiperbólicas corresponden se alcanzan cuando $k^2 - 1 > 0$. En este caso el punto de máximo acercamiento al origen de coordenadas corresponde al punto C del diagrama.

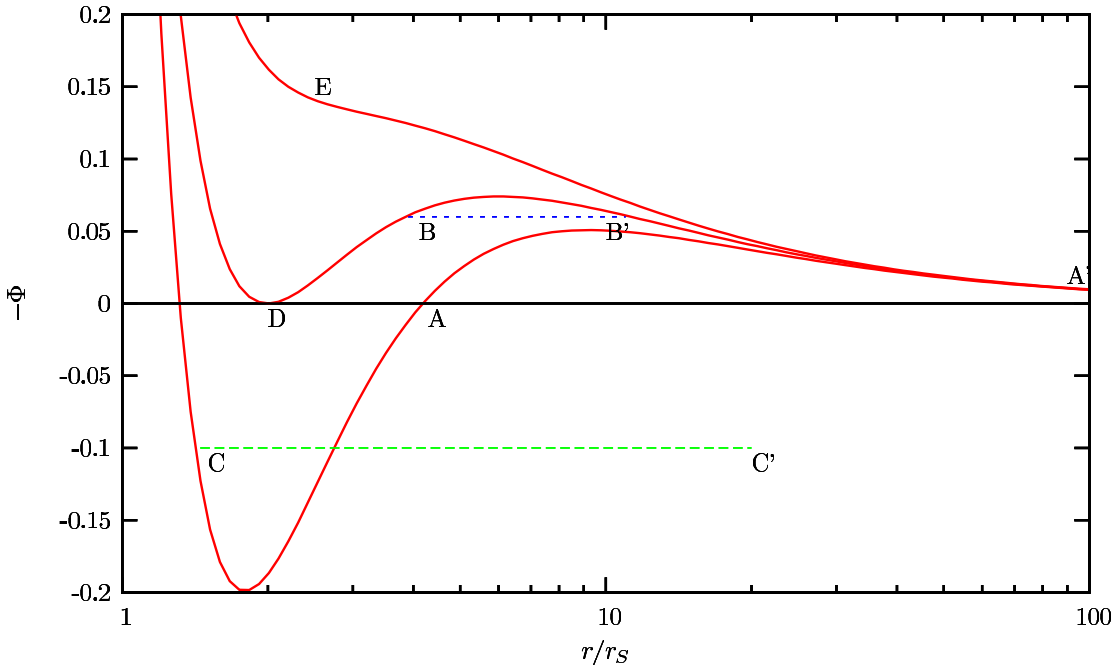

Figura VII.2: Variación del potencial gravitacional y centrifugo Φ (ver texto) en un campo gravitacional relativista como función del logaritmo del radio r en unidades del radio gravitacional r_S. De abajo hacia arriba, las curvas muestran valores del parámetro $\eta = 5.5,\ 4.0,\ 2.7$.

Tarea 18

(I) *Muestra que el caso límite del punto D en la Figura* VII.2 *corresponde a valores de* $\eta = 4$ *y* $r = 2r_S$.

(II) *Muestra que el punto E en la misma figura corresponde a la última órbita circular estable para la cual* $d^2\Phi/dr^2 = 0$. *Calcula que para este caso* $\eta = 3$ *y* $r = 3r_S$.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

§50. Perihelio de órbitas planetarias

Escribiendo $\dot{r} = (dr/d\varphi)(d\varphi/d\tau)$ en la ecuación (49.8) y utilizando la relación (49.5), se obtiene que

$$\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} - \frac{2GMh^2}{r^3c^2} = 2c^2(k^2-1).$$

En mecánica clásica se obtiene a una relación similar y para resolver la ecuación diferencial, se define $u = 1/r$, de tal forma que

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{2GM}{h^2}u - \frac{2GM}{c^2}u^3 = 2\frac{c^2}{h^2}(k^2-1). \tag{50.1}$$

Diferenciando esta relación con respecto al ángulo azimutal se obtiene

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2. \tag{50.2}$$

Si hubiésemos hecho este análisis de manera Newtoniana, utilizando la ecuación (49.7), el resultado obtenido sería

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2}. \tag{50.3}$$

La diferencia entre la ecuación (50.2) y la relación (50.3) es el término proporcional a u^2 que aparece en la versión relativista. Esta corrección es bastante pequeña para el caso de la tierra girando alrededor del sol. Esto puede verse comparando los términos que aparecen del lado derecho de la ecuación (50.2), i.e.

$$\frac{(3GM/c^2)u^2}{(GM/h^2)} = \frac{3u^2h^2}{c^2} = 3\frac{v^2}{c^2}, \tag{50.4}$$

para el caso de una órbita circular. Debido a que la velocidad de la tierra alrededor del sol es de 30 km/s, la corrección relativista es de tan sólo 3 partes en 10^8. Aunque esto parece un efecto pequeño resultó ser uno de los experimentos cruciales para comenzar a tomar en serio a la teoría general de la relatividad. En el caso de Mercurio su órbita alrededor del sol tiene una elipticidad de $\epsilon \approx 0.2$. El efecto de la corrección relativista resulta en hacer

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

que el perihelio (la distancia más corta entre la órbita del planeta y el sol) de Mercurio "rota" poco a poco cada órbita completada por el planeta.

Tarea 19

Considera una órbita circular. En el caso Newtoniano esto significa que utilizando la ecuación (50.3) *se obtiene que* $d^2u/d\varphi^2 = 0$*, de tal forma que* $u = GM/h^2$*. Esta es una solución a orden cero de la ecuación* (50.2) *para órbitas circulares.*

(I) *Reescribe la ecuación* (50.2) *para el caso en que* u *es una corrección a la solución a cero orden, es decir para cuando* $u = GM/h^2 + g(\varphi)$*. Muestra que la ecuación tiene la forma de una ecuación de oscilador harmónico no–homogénea y que la "frecuencia" adimensional* ω *de este oscilador está dada por*

$$\omega^2 = 1 - \left(\frac{3GM}{c^2}\right)\left(\frac{2GM}{h^2}\right).$$

(II) *Muestra que el periodo* $T = 2\pi/\omega = 2\pi(1 + 3G^2M^2/c^2h^2)$.

(III) *Finalmente muestra que el cambio fraccional de la fase por cada órbita alrededor del sol* $(T - 2\pi)/2\pi = d\varphi/2\pi$ *está dado por*

$$\frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{3}{4}\left(\frac{c}{v}\right)^2\left(\frac{r_S}{r}\right)^2.$$

El cálculo exacto para órbitas elípticas muestra que

$$\frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{3}{4}\left(\frac{c}{v}\right)^2\left(\frac{r_S}{r}\right)^2\frac{1}{1-\epsilon^2}. \tag{50.5}$$

Los valores de Mercurio son $r = 5.8 \times 10^{10}\,m$, $T = 88$ días , $r_S = 3\,km$ y $\epsilon = 0.2$. De esta manera se encuentra que el avance del perihelio de Mercurio (¡hazlo!) es de 43 arcsec por siglo. Este resultado fue uno de los grandes logros de la relatividad general. En 1859 Le Verrier encontró que una vez eliminados los efectos de las perturbaciones de los planetas vecinos a Mercurio un avance del perihelio del mismo de 43 arcsec por siglo se observaba. Einstein demostró esto al publicar su primer artículo de la teoría general de la relatividad.

En el sistema solar, el efecto de precesión de órbitas es pequeño. Sin embargo para

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

el caso de sistemas de estrellas binarias compactas el efecto se amplifica. El ejemplo más importante es el pulsar binario PSR 1913+16 para el cual su periodo orbital es de 7.75 hrs y la elipticidad de las estrellas con respecto a sus órbitas alrededor del centro de masa es de $\epsilon = 0.617$. En este caso el avance del perihelio de sus órbitas puede utilizarse incluso para medir la masa de las estrellas.

§51. Partículas y rayos de luz cerca de agujeros negros

Consideremos ahora una partícula de prueba que cae hacia $r = 0$ de manera radial dejando el reposo en infinito. La ecuación (49.8) de energía con $h = 0$ es entonces

$$m\dot{r}^2 - \frac{2GMm}{r} = mc^2(k^2 - 1) = E_{tot} = 0. \tag{51.1}$$

De aquí que el tiempo propio que tarda la partícula de prueba en llegar al origen a partir de una posición r_1 es

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = -\int_{r_1}^{0} \frac{r^{1/2}}{(2GM)^{1/2}} dr = \left(\frac{2}{9GM}\right)^{1/2} r_1^{3/2}. \tag{51.2}$$

Es evidente entonces que el tiempo propio que tarda una partícula en caer a $r = 0$ es finito. Nada peculiar ha pasado al alcanzar el radio de Schwarzschild r_S. Sin embargo, un observador en infinito observa un comportamiento sumamente distinto. Para analizar esto, reescribamos la métrica de Schwarzschild (48.1) de la siguiente manera: $dt^2 = \alpha^{-1} d\tau^2 + (\alpha c)^{-2} dr^2$. Así, sustituyendo este valor para $d\tau$ en la ecuación (51.2) se obtiene que

$$dt = -\frac{1}{c}\left(\frac{r}{r_S}\right)^{1/2} \frac{dr}{1 - r_S/r}.$$

Integrando ahora desde r_1 hasta r_0 se llega a

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{1}{c r_S^{1/2}} \int_{r_1}^{0} \frac{r^{3/2}}{(r - r_S)} dr. \tag{51.3}$$

A medida que r se aproxima a r_S, el tiempo tiende a infinito. En otras palabras, para un observador externo localizado a distancias suficientemente alejadas del origen, una partícula que cae hacia un objeto gravitacional toma un tiempo infinito en hacerlo a pesar de que

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

el tiempo propio para alcanzar el mismo se lleva a cabo de manera finita.

Las señales de luz emitidas por el objeto que cae hacia el origen, las cuales son son medidas por un observador externo, presentan cada vez más fuertes corrimientos al rojo a medida que se alcanza el radio de Schwarzschild. En efecto, el intervalo de tiempo propio con el cual se emiten señales está dado por $ds/c = d\tau = (1 - r_S/r)^{1/2}dt$. En termino de frecuencias ν observadas y emitidas, esto puede reescribirse como

$$\nu_{obs} = (1 - r_S/r)^{1/2}\nu_{em}. \tag{51.4}$$

De acuerdo con la definición de *corrimiento al rojo gravitacional* z_g dada en la sección §40, se sigue que en este caso

$$z_g = (1 - r_S/r)^{-1/2} - 1. \tag{51.5}$$

Así pues el corrimiento al rojo gravitacional diverge a medida que la partícula de prueba se aproxima al radio de Schwarzschild. De esta manera, es imposible observar cualquier señal de luz que se emita dentro del radio de Schwarzschild. Sin embargo, es claro que las señales de luz pueden viajar hacia dentro para alcanzar $r = 0$, pero aquellas dentro de r_S no pueden propagarse hacia fuera.

Queda entonces claro que objetos compactos cuyo radio es menor a r_S son negros para cualquier observador externo. De ahí que se denominen objetos negros. Debido a que cualquier partícula que cruce el radio r_S inevitablemente alcanza el punto $r = 0$ se denominan agujeros. En suma hemos probado que la métrica de Schwarzschild predice naturalmente la existencia de *agujeros negros* concebida inicialmente por John Mitchell en el siglo XVIII.

Cabe hacer notar que la aparente singularidad que aparece en la métrica de Schwarzschild en $r = r_S$ es una singularidad removible pues se debe únicamente a la elección de coordenadas que se ha tomado. Sin embargo, la singularidad en $r = 0$ es una singularidad real y no hay forma de removerla mediante un cambio de coordenadas. Esto fue demostrado por Roger Penrose de la Universidad de Cambridge en 1965, que de manera general muestra que todo objeto que se colapsa más allá del radio de Schwarzschild debe generar una singularidad.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

§52. Energía de amarre en órbitas circulares

La conservación de la energía para una partícula de prueba que se mueve en un espacio–tiempo determinado por la métrica de Schwarzschild está dada por la ecuación (49.8). En el caso de una órbita circular $\dot{r} = 0$ y así

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m\alpha (r\dot{\varphi})^2 - \frac{GMm}{r}. \tag{52.1}$$

Esta relación es muy parecida a la que se obtiene en mecánica Newtoniana, excepto por el factor multiplicativo α en la energía cinética. En mecánica no–relativista sabemos que, para el caso de órbitas circulares amarradas al objeto central que produce el campo gravitacional, la energía cinética total de la partícula T es la mitad de la energía potencial $|U|$. Éste resultado se le conoce como el *teorema virial* (cf. sección §26)

$$T = \frac{1}{2}|U|. \tag{52.2}$$

Para entender su significado, imaginemos una partícula libre que se deja en el infinito. De esta manera, la energía cinética de la misma es el valor absoluto de su energía potencial gravitacional (piensa en la definición de la velocidad de escape). Si esta partícula de prueba va a ser amarrada a una trayectoria circular alrededor del objeto central gravitacional, entonces debe perder la mitad de su energía potencial de alguna manera (por ejemplo por enfriamiento radiativo). De lo contrario no puede amarrarse a una órbita circular. En la sección §36 vimos como esto se lleva a cabo en discos de acreción.

De la misma manera podemos identificar al lado derecho de la ecuación (52.1) como la energía de amarre en el caso de gravitación relativista. Utilizando la ecuación (50.2) para el caso en que $du/d\varphi = 0$ entonces

$$h^2 = \frac{(GM/r)}{1 - 3GM/c^2 r}. \tag{52.3}$$

Sustituyendo la ecuación (52.3) en la igualdad (52.1) se obtiene que

$$E_{tot} = -\frac{GMm}{2r}\left\{\frac{1 - 2r_S/r}{1 - 3r_S/2r}\right\}, \tag{52.4}$$

que es la *versión relativista del teorema del virial*. Evidentemente cuando la velocidad de

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

la luz tiende a infinito, se obtiene la versión Newtoniana del teorema del virial. Ahora bien, supongamos nuevamente que soltamos materia desde infinito hacia el centro del campo gravitacional. Es obvio que solamente una cantidad finita de energía se genera cuando se amarra a una partícula en una órbita circular.

Tarea 20

Muestra que el máximo de la energía de amarre en la ecuación (52.3) *ocurre cuando* $r = 3r_S$ *(el radio de la última órbita estable) y que además la energía de amarre a este radio está dada por* $E_{tot} = -mc^2/18$

Este resultado es sumamente importante porque para alcanzar la última órbita estable es necesario que la partícula de prueba pierda $1/18 = 5.5\,\%$ de su masa en reposo. En otras palabras es posible, mediante el amarre de una partícula a su última órbita, liberar $5.5\,\%$ de su energía en reposo. Esto es mucho mayor a lo que se puede liberar por medio de reacciones nucleares. Por ejemplo, si se combinan cuatro núcleos de hidrógeno en una reacción nuclear se libera solamente $0.7\,\%$ de la energía en reposo de la materia, un orden de magnitud menor al que se obtiene mediante el amarre de masas a la mínima órbita circular estable (cf. ecuación (27.6)).

Este resultado es esencial para calcular de manera cualitativa las dimensiones de un objeto que emite radiación. Si observamos variaciones de emisión de intensidad (digamos por un factor de dos) en una escala de tiempo τ entonces la causalidad implica que la región debe ser menor a $r = c\tau$. La última órbita estable nos dice esencialmente el valor mínimo que debe tener el objeto para emitir radiación. En las aplicaciones astrofísicas de agujeros negros hablaremos más con respecto a estos análisis.

§53. Deflexión de la luz por objetos gravitacionales

Una consecuencia inmediata del principio de equivalencia es que los rayos de luz sufren deflexiones en la presencia de campos gravitacionales (cf. sección §41). Los rayos de luz se mueven a lo largo de geodésicas nulas $ds = 0$. Esto trae como consecuencia el hecho de que el momento angular específico h y la energía k definidos en las ecuaciones (49.5) y la relación (49.4) respectivamente divergan cuando ds tiende a cero. De esta manera,

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

podemos encontrar la ecuación que describe la trayectoria de fotones en la métrica de Schwarzschild poniendo el valor $h^{-1} = 0$ en la ecuación (50.2) para obtener

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3GM}{c^2}u^2. \tag{53.1}$$

En el caso en que los fotones se propaguen en órbita circular alrededor de un agujero negro entonces el primer término del lado izquierdo en la ecuación (53.1) es cero y así

$$r = \frac{3GM}{c^2}. \tag{53.2}$$

Tarea 21

La solución de la ecuación (53.1) *puede hacerse de la siguiente manera para el caso en que* $u = 1/r$ *es una cantidad de primer orden. Consideremos primero la ecuación homogénea, es decir, la ecuación con el lado derecho igual a cero.*

(I) *Muestra que una solución satisfactoria de esta ecuación es* $u_0 = \sin\varphi/R$, *donde* R *es la distancia de máximo acercamiento al objeto central y* φ *es el ángulo azimutal.*

Evidentemente esta solución corresponde a una trayectoria recta, lo cual se espera en el caso de la ausencia de un campo gravitacional cuando el término del lado derecho de la ecuación (53.1) *es cero.*

(II) *Para encontrar la solución de la ecuación* (53.1) *al siguiente orden de aproximación considera* $u = u_0 + u_1$ *donde* u_1 *es una cantidad del primer orden. Muestra que la ecuación* (53.1) *es entonces*

$$\frac{d^2u_1}{d\varphi^2} + u_1 = \frac{3GM}{c^2R^2}\sin^2\varphi.$$

(III) *Encuentra que la solución de la ecuación* (53.1) *está dada por*

$$u = u_0 + u_1 = \frac{\sin\varphi}{R} + \frac{3GM}{2c^2R^2}\left(1 + \frac{1}{3}\cos 2\varphi\right)$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

(iv) *Como* $u = 1/r \ll 1$ *entonces se espera que* $\varphi \ll 1$. *Muestra entonces que con esta aproximación el valor de* $\varphi = \varphi_\infty$ *está dado por* $\varphi_\infty = -2GM/Rc^2$.

Dada la simetría del problema la deflexión total de un rayo de luz al pasar cerca de un objeto gravitacional es dos veces el valor absoluto de φ_∞ *(una deflexión por la parte de atrás del objeto y otra por enfrente). De esta manera, la deflexión total* $\Delta\varphi$ *está dada por*

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{Rc^2} \tag{53.3}$$

Para los rayos de luz que pasan rosando el limbo del sol el valor de $\Delta\varphi = 1.75$ arcsec. Esta predicción llevo a Eddington y Crommelin de la Universidad de Cambridge en 1919 a verificar el resultado midiendo con precisión la deflexión angular de estrellas que se encuentran cerca del limbo solar en un eclipse. Dos expediciones, una en la costa Oeste de África y otra en el norte de Brasil mostraron que el resultado fue de 1.98 ± 0.012 arcsec y la otra 1.61 ± 0.3 arcsec. Estas observaciones fueron complicadas de realizar y siempre hubo controversia sobre estos resultados. Fue hasta 1970 cuando radio–interferómetros en diversas partes del mundo mostraron la veracidad del resultado.

La consecuencia inmediata de estos resultados son los denominados *lentes gravitacionales*. Imagina que justo detrás de una galaxia distante un cuasar emite radiación. Lo que se espera es observar una imagen circular (un anillo) alrededor de la galaxia deflectora. Estos *anillos de Einstein* han sido observados en diversas ocasiones y un ejemplo de estas observaciones se muestra en la Figura VII.3. Evidentemente, si el alineamiento no es perfecto, se espera ver una amplificación de la imagen del objeto lejano.

§54. Experimentos en gravitación relativista

La gran mayoría de experimentos para verificar la validez de la relatividad general están basados en las propiedades de la métrica de Schwarzschild. Existen cuatro experimentos que por tradición verifican la teoría de la relatividad.

El primero es con respecto al cambio rojo gravitacional que presenta una onda electromagnética cuando se mueve a lo largo de un campo gravitacional. La manera de hacer este experimento de manera tradicional es con ayuda del efecto Mössbauer. Estos expe-

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

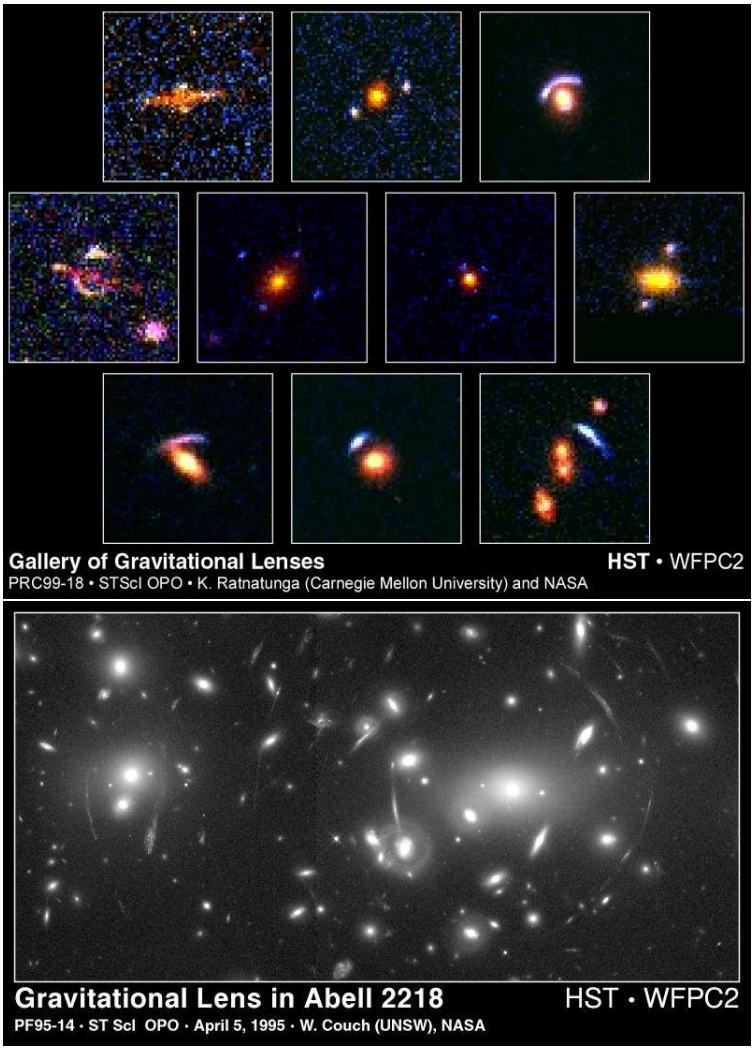

Figura VII.3: Diversos lentes gravitacionales en astrofísica. La imagen muestra imágenes ópticas tomadas por el Telescopio espacial Hubble (HST). Los arcos que se muestran en cada panel son lentes gravitacionales producidos por cúmulos de galaxias. El mas notorio de todos es el último panel que muestra el cúmulo Abel 2218. Técnicas de análisis de lentes gravitacionales para sondear el universo profundo en cosmología son de gran utilidad hoy en día. La imagen es Copyright de la NASA y fue obtenida de `http://hubblesite.org`.

rimentos fueron hechos por Pound, Rebka y Snider en los 1960's y mostraron la validez del corrimiento al rojo de fotones subiendo y bajando en una torre de 22.5 m de altura

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

de la Universidad de Harvard. Debido al efecto Mössbauer los efectos de amortiguamiento de los fotones de rayos–γ son cero ya que el momento es absorbido por toda la superficie atómica. Sin embargo, la resonancia de rayos–γ es notable, de tal forma que son los efectos Doppler son los que causan la absorción de esta resonancia.

El segundo experimento, que fue el gran triunfo de la teoría general de la relatividad en su época fue la explicación de la precesión del perihelio de mercurio, discutido en la sección §50.

La tercer prueba consiste en la medición de la deflexión de los rayos de luz provenientes de estrellas lejanas que pasan junto al sol, discutidos en la sección §53. Hoy en día existen experimentos mas precisos que demuestran la veracidad de este fenómeno de deflexión de rayos de luz. Estos experimentos se llevan acabo mediante el uso de un arreglo de radiotelescopios en distintos países que forman el llamado "*Very Long Baseline Interferometry*" (VLBA). Con este arreglo de experimentos es posible monitorear con una precisión excelente (incluso menores a milisegundos de arco) la separación angular entre radio fuentes compactas cuando están cerca del sol.

La cuarta prueba tradicional resulta ser la más importante de todas y es muy parecida al experimento que muestra la curvatura que presentan los rayos de luz al pasar cerca del sol. Básicamente lo que se observa es la dilación del tiempo que se presenta cuando una onda electromagnética se propaga a través de un campo gravitacional variable. En 1964 Irwin Shapiro se dio cuenta que los rayos de luz que pasaban cerca del sol causaban una dilación del tiempo que puede ser medida mediante cronometraje preciso de señales de radio enviadas desde la tierra y reflejadas por planetas o vehículos espaciales cuando estos mismos están a punto de ser ocultados por el sol. Debido al éxito de estos experimentos, sondas espaciales futuras llevaron consigo "repetidores". Los más famosos fueron los llevados a Marte por las sondas Vikingo. Gracias a estas sondas, se obtuvieron resultados más precisos.

Existen muchos más experimentos que confirman maravillosamente el genio de Einstein al crear su teoría relativista de la gravitación. Sin embargo el experimento más grandioso y espectacular de todos es sin lugar a duda el que se obtiene al observar las ondas electromagnéticas en radio provenientes de algunos pulsares.

Como vimos en el capitulo V, es posible mostrar que los pulsares son los relojes más precisos sobre escalas de tiempo grandes que conocemos en el universo. La manera de mostrar esto es comparando las variaciones de tiempo de rotación de dos pulsares contra

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

un reloj atómico en la tierra. Los pulsares son un regalo de la naturaleza para los astrofísicos ya que son relojes moviéndose en un campo gravitacional. Justo lo necesario para verificar la teoría general de la relatividad.

Existen varios sistemas binarios de pulsares. El primero en conocerse fue el sistema PSR 1913+16. Este sistema binario tiene un periodo de 7.75 hrs con una excentricidad notable de $\epsilon = 0.617$. Con este regalo para los astrofísicos relativistas pueden hacerse diversas comparaciones entre las observaciones y las predicciones de la teoría relativista. Por ejemplo, es posible encontrar el valor del cociente de las dos masas de ambas estrellas. Sin embargo, la predicción más fuerte de todas con respecto a este sistema binario tiene que ver con el decaimiento de la energía rotacional del sistema debido a la emisión de *ondas gravitacionales*[†]. La razón de cambio de la frecuencia angular del sistema con respecto al tiempo es proporcional a la quinta potencia de la frecuencia angular. El decaimiento de este sistema ha sido observado por tres décadas y está justamente dado por el valor antes mencionado. Un triunfo más de la teoría relativista de la gravitación. Este resultado es muy importante e implica que cualquier otra teoría de la gravitación debe ser eliminada pues la teoría relativista de la gravitación predice una emisión cuadrupolar. Así pues, debemos estar muy seguros que la teoría general de la relatividad es sin duda la teoría que describe los fenómenos gravitacionales de manera confiable[‡].

Otro experimento que puede hacerse con un sistema binario de pulsares es investigar la variación de la constante gravitacional G con respecto al tiempo cósmico. Resulta que puede mostrarse que si existe alguna variación temporal $\dot{G}/G$ esta debe ser menor a 10^{-11} año^{-1}. Esto significa que si G ha tenido una variación en el tiempo, entonces esta misma es

[†]De la misma manera que en el caso de campos electromagnéticos, las masas al ser aceleradas producen radiación. Esta radiación es de forma cuadrupolar (a diferencia de la radiación bipolar para el caso de cargas electromagnéticas) y produce ondas gravitacionales (a diferencia de las ondas electromagnéticas para el caso de electromagnetismo). Estas ondas gravitacionales son deformaciones en la estructura del espacio–tiempo que se transmiten a la velocidad de la luz.

[‡]Nota que todos los experimentos hasta ahora mencionados son llevados acabo en objetos cuyas escalas no rebasan a la del sistema solar. Como veremos en el capítulo de cosmología, las observaciones de lentes gravitacionales requieren de materia no–bariónica (la materia oscura) para poder ser interpretados correctamente. Formalmente, la teoría de la relatividad gravitacional no ha sido verificada a escalas cosmológicas. De hecho, uno de los parches (o excelente predicción –solo el tiempo dirá quien tiene la razón) mas grandes que tiene el modelo estándard de cosmología es la introducción de materia oscura y energía oscura para predecir correctamente la dinámica del universo. Hoy en día, diversos grupos alrededor del planeta están trabajando por entender la posibilidad de que estas observaciones impliquen una modificación natural a la Teoría General de la Relatividad a escalas cosmológicas.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

significante para tiempos cosmológicos, i.e. del orden de 10^{11} años.

Hasta ahora hemos trabajado con agujeros negros que únicamente toman en consideración la masa M como una de sus propiedades. Sin embargo, la gran mayoría de los objetos en el universo tienen rotación: las estrellas, las galaxias, etc. De hecho, si un agujero negro fue producido gracias al colapso de una estrella uno espera que el momento angular de la estrella quede heredado al agujero negro mismo. Evidentemente estos agujeros negros con momento angular son los más apropiados en el estudio de la astrofísica. Además de momento angular, un agujero negro puede tener también una carga eléctrica asociada al mismo y una carga magnética (si está última existe). De esta manera los agujeros negros en su forma más general resultan ser descritos por cuatro parámetros, la masa, el momento angular y las cargas eléctrica y magnética. Por esta razón los agujeros negros resultan ser los objetos macroscópicos más simples del universo.

§55. Agujeros negros en general

Fue en 1916 cuando una nueva solución con simetría radial a las ecuaciones de Einstein fue encontrada por Reissner-Nordstrom. Esta es la solución para el caso de una masa puntual M con carga Q. En 1962 el matemático Kerr encontró la solución más general para un agujero negro con momento angular J. Se puede mostrar que los agujeros negros aislados deben poseer únicamente estos tres números para su descripción. Cualquier otra propiedad del sistema inicial que dio lugar al agujero negro es radiada hacia el exterior durante el proceso de formación del agujero. Por esta razón, estos objetos resultan ser los objetos macroscópicos más simples del universo. A este resultado se conoce como el *teorema de no pelos* para agujeros negros.

Los agujeros negros más importantes para los astrofísicos son los agujeros de Kerr. Estos mismos están descritos por la *métrica de Kerr* que puede escribirse de la siguiente manera utilizando las *coordenadas de Boyer–Lindquist*

$$\begin{aligned} ds^2 =& \frac{(\Delta - a^2\sin^2\theta)}{\Sigma}c^2dt^2 - 2a\sin^2\theta\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}dtd\varphi - \\ &- \frac{(r^2+a^2) - \Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2, \end{aligned} \tag{55.1}$$

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

en donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \tag{55.2}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2GMr/c^2. \tag{55.3}$$

Aquí hemos escrito $a = J/Mc$ que representa el momento angular del agujero por unidad de masa por unidad de velocidad, es decir, tiene dimensiones de distancia. J es el momento angular del agujero y M su masa. Cuando el agujero no está en rotación, es decir, cuando $a = 0$, la métrica de Kerr converge a la métrica de Schwarzschild. Haciendo el cambio $\varphi \to -\varphi$ se llega a la misma ecuación si $a \to -a$. De tal manera que se puede escoger a no negativa sin perdida de generalidad.

La primer consecuencia evidente de la métrica de Kerr es que los coeficientes de la misma no dependen explícitamente de el tiempo t ni de la coordenada angular φ. De esta manera, la métrica resulta estacionaria y axisimétrica.

Tal y como sucede con la métrica de Schwarzschild, la métrica de Kerr tiene una singularidad en la componente radial cuando $\Delta = 0$. Este radio corresponde a la superficie de corrimiento al rojo infinito u *horizonte* del agujero. El radio al que esto ocurre está dado por las soluciones $\Delta = 0$. De esta manera, es útil escribir

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-), \tag{55.4}$$

donde

$$r_\pm = \left(GM/c^2\right) \pm \sqrt{(GM/c^2)^2 - a^2}. \tag{55.5}$$

Puede mostrarse que justamente la superficie formada por la ecuación (55.5) para el signo positivo, el *horizonte*, juega el mismo papel que lo que hace el radio de Schwarzschild para la métrica de Schwarzschild en el caso de agujeros sin rotación. Todo aquello que cae dentro de este horizonte no puede escapar del mismo.

La ecuación (55.5) impone un límite sobre el momento angular máximo que un agujero negro puede tener. El valor de este momento angular máximo es claramente $J = GM^2/c$.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Objetos con un momento angular más grande que este valor no pueden colapsarse a formar un agujero negro. Este resultado es sumamente importante porque para un agujero negro con momento angular máximo –un *agujero negro con máxima rotación*– resulta que $r_+ = GM/c^2$, que es justamente la mitad de el radio de Schwarzschild.

Existe un efecto importante para los agujeros negros con rotación. Este efecto corresponde al *arrastramiento de sistemas inerciales de referencia*. Justamente la rotación del agujero hace que entre más cerca se encuentre un objeto del agujero, el arrastre de los sistemas de referencia sea más y más pronunciado hasta que nada pueda resistir este arrastre en dirección a la dirección de rotación del agujero. En otras palabras, un giroscopio localizado lo suficientemente cerca al agujero debe precesar. Existe un límite sobre el cual el arrastre es tan severo que nada puede resistirlo de tal forma que ningún observador puede mantenerse en reposo con respecto a las estrellas lejanas. Esta superficie está más lejos del horizonte y se denomina *límite estático* y está dado por

$$r_{est} = (GM/c^2) + \sqrt{(GM/c^2)^2 - a^2\cos^2\theta} \tag{55.6}$$

Puede también mostrarse que a pesar de que las regiones lejanas al agujero negro con rotación son como–tiempo, existen regiones fuera del horizonte que son como–espacio. La superficie que limita a esta región se denomina *ergoesfera* y la región entre el horizonte y esta última se denomina *ergoregión*. Resulta que la ergoesfera coincide con la superficie que da el límite estático. Lo importante de esto es que la ergoesfera coincide con el horizonte únicamente para valores de $\theta = 0,\ \pi$ correspondientes a los polos del agujero (cf. Figura VII.4).

La ergoregión es sumamente importante en astrofísica. Para ver esto, consideremos una partícula proveniente de infinito donde su energía $E = p^0c$ (cf. ecuación (14.5)) que se mueve sobre una geodésica en el espacio–tiempo y penetra a la ergoregión. Ahí dentro, sufre un decaimiento en dos partículas. La primera de ellas entra al agujero negro a través del horizonte y la segunda de ellas escapa a infinito. La conservación de la energía nos dice la energía de la partícula que escapó a infinito está dada por $E_{esc} = E - E_{cae}$. Normalmente $E_{cae} > 0$ de tal manera que $E_{esc} < E$. Sin embargo, dentro de la ergoesfera, como el espacio es como–espacio, entonces cabe la posibilidad que $E_{cae} < 0$ de tal forma que $E_{esc} > E$. Este es el famoso *proceso de extracción de Penrose* mediante el cual existe la posibilidad de

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

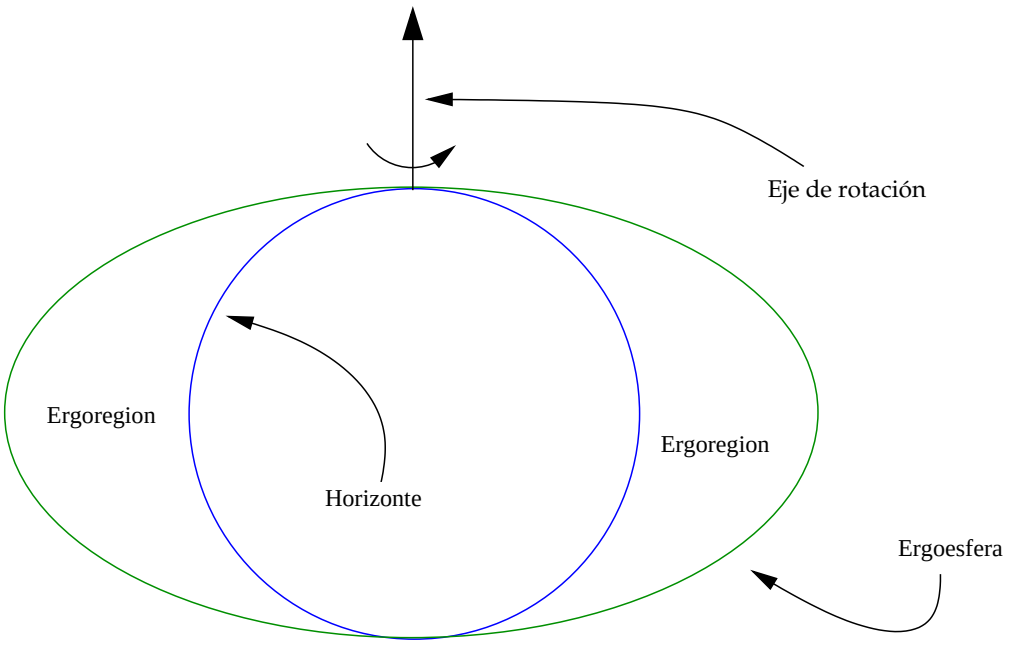

Figura VII.4: La figura muestra el horizonte de un agujero negro que rota alrededor del eje vertical. El horizonte está dado por la ecuación (55.5) con signo positivo. La ergoesfera es aquella región que contiene eventos que pueden ser como–espacio. Ambas regiones coinciden en los polos del horizonte.

extraer energía del único lugar disponible ¡el agujero negro!

Puede mostrarse que la fracción de la masa en reposo del agujero negro que puede hacerse disponible al universo externo mediante el proceso de Penrose está dada por $1 - (1/\sqrt{2})\{1 + [1 - (J/J_{max})^2]^{1/2}\}^{1/4}$. Para un agujero negro de máxima rotación este valor resulta ser de $\sim 30\,\%$.

El hecho de que el radio del horizonte sea más pequeño en el caso de agujeros negros con rotación tiene consecuencias importantes. Por ejemplo, para el caso de agujeros con rotación máxima es posible que partículas puedan encontrarse en órbitas circulares más cercanas al radio dado para el caso de agujeros negros sin rotación, que es de $3r_S$ (cf. Tarea 18). Resulta que para el caso de agujeros negros en rotación el resultado depende fuertemente de si la partícula órbita en dirección a la de giro del agujero negro (*corrotación*) o en dirección opuesta (*contra–corrotación*). Los casos de más interés suceden para agujeros negros con rotación máxima. En este caso la última órbita circular estable se encuentra a $r = r_+ =$

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

GM/c^2 en el caso de corrotación y $r = 9r_+$ para partículas en contra-corrotación. De esta forma, las energías máximas de amarre pueden estimarse. Para el caso de corrotación estas energías están dadas por una fracción de $1 - 1/\sqrt{3}$ de la masa en reposo de la partícula en órbita circular y por $1 - \sqrt{25/27}$ para las contra-corrotacionales. Así pues en el caso de contra-corrotación, es posible extraer un 43 % de la masa en reposo del material que cae rotatóriamente hacia el agujero negro. Éste es justamente el proceso mediante el cual se libera energía a través de la acreción de materia en agujeros negros y es muy probable que está misma sea la fuente de energía de varios de los objetos más energéticos en el universo. Esta energía es mucho más grande que la obtenida con la fusión nuclear que en el mejor de los casos alcanza a liberar $\sim 1\,\%$ de la masa en reposo (cf. ecuación (27.6)). Además esta energía es 10 veces más grande que la que se puede liberar en la acreción para agujeros negros sin rotación.

§56. Leyes de la termodinámica para agujeros negros

El *horizonte de eventos* es aquella región del espacio que divide el interior (el agujero negro propiamente) y el exterior de un agujero negro. Formalmente se dice que un agujero negro es el conjunto de eventos que impiden el escape a infinito de cualquier partícula o fotón. De esta manera, el horizonte está formado por todas las posibles trayectorias de la luz que son apenas capaces de no caer en el agujero encontrándose estancadas de esta manera alrededor del mismo por siempre. Es claro que estos rayos de luz en el horizonte no pueden acercarse los unos a los otros, pues esto ocasionaría una eventual intersección de los mismos. Esto implicaría que eventualmente los rayos de luz serían tragados por el agujero negro, lo cual es una contradicción. Así pues, en el horizonte de eventos los rayos de luz únicamente pueden separase unos de otros o permanecer paralelos. En otras palabras, el área A de el agujero no puede disminuir, i.e. $dA \geq 0$. Esta ley de incremento del área de un agujero negro fue formulada por Hawking de la Universidad de Cambridge en la década de los 1970's. La manera de incrementar esta área es cuando materia y radiación caen al agujero o bien por el amalgamiento de dos agujeros después de su colisión. El hecho de que el área de los agujeros negros nunca decrece es similar al hecho de que la entropía de un sistema en termodinámica nunca decrece: la *segunda ley de la termodinámica*. Recordemos que esta ley es solamente probabilística y es válida únicamente en la gran mayoría de casos.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Por ejemplo, la probabilidad de encontrar todas las partículas de aire en tu recamara en una esquina de la misma a un determinado instante es casi cero, pero no cero. Sin embargo como es sumamente poco probable, consideramos este hecho como físicamente imposible. Un agujero negro podría quizás violar la segunda ley de la termodinámica ($dA \geq 0$) de una manera más evidente. Al arrojar una caja con gas bastante desordenado (i.e. con alta entropía) a un agujero, la entropía de la materia fuera del agujero disminuye. Sin embargo si consideramos a la entropía como la entropía dentro y fuera del horizonte de eventos, evidentemente no hay contradicción con la segunda ley de la termodinámica. Pero no existe forma para ver dentro del agujero, así que observadores externos no podrían medir cuanta entropía hay dentro del agujero. ¿Cómo medir la entropía de un agujero negro entonces?

Bekenstein, quien por cierto nació en la Ciudad de México, cuando era un estudiante de la Universidad de Princeton dio la respuesta a tal pregunta en la década de los 1970's. Bekenstein mostró que midiendo el área de un agujero negro resultaba en una medida de su entropía. De esta manera, cuando la materia era succionada al agujero, la suma de la entropía externa con el área del horizonte de eventos nunca decrecería.

El hecho de que un agujero negro posea entropía significa que debe existir una temperatura relacionada con el mismo. Esta temperatura, la llamada *temperatura de Hawking* o mas correctamente *temperatura de Hawking–Zeldovich* está dada por

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M \kappa_B} \approx 10^{-7} \frac{M_\odot}{M} \, K, \tag{56.1}$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck y κ_B es la constante de Kelvin.

Este resultado es totalmente contradictorio a todo lo que uno puede esperar de un agujero negro. Dentro del horizonte de eventos de un agujero negro nada escapa, ni siquiera la radiación electromagnética. Este excelente análisis realizado correctamente por Hawking mostró sin embargo que al considerar procesos de electrodinámica cuántica en el estudio de los agujeros negros, un espectro de radiación térmica dado por la ecuación (56.1) debía ser observado.

La teoría cuántica explica de manera excelente como es posible llevar a cabo esta emisión de radiación. Resulta que fotones virtuales son creados del vacío en todas partes del universo. Uno de estos tantos lugares es por ejemplo junto al horizonte de un agujero

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

negro. En algunos casos, justamente antes de que estos mismos se aniquilen, uno de ellos es atraído hacia el agujero (debido a la fuerte atracción gravitacional), mientras que el otro es capaz de escapar hacia infinito. De esta manera la aniquilación de estos fotones virtuales no puede llevarse acabo y así se produce un espectro térmico determinado por la ecuación (56.1).

De manera más general, no solamente son fotones los que son capaces de ser emitidos por el agujero. También partículas diversas pueden hacerlo. Basta con formar un par virtual en el cual, una partícula con energía negativa es devorada por el agujero negro. De esta manera su compañera, con energía positiva es capaz de ser lanzada al exterior en forma de radiación.

De la ecuación (56.1) se sigue que la evaporación de agujeros negros debida a la radiación de Hawking es bastante insignificante para agujeros con masas comparables a las del sol. Sin embargo, si agujeros negros de masa bastante baja fueron formados en el universo gracias al colapso de las pequeñas irregularidades del gas primordial en el universo, entonces todos los agujeros con masas menores a $10^{12}\,\mathrm{kg}$ estarían evaporándose en la época presente. Sustituyendo este valor en la ecuación (56.1) se sigue que $\mathrm{T} \sim 10^{11}\,\mathrm{K}$, de tal manera que la emisión esperada debería ser un pulso de rayos–γ. Estos agujeros realmente no deberían ser llamados negros. ¡Son blancos, calientes y emiten energías impresionantes! Hasta el presente no ha sido posible observar estos *agujeros negros primordiales*, pero la lucha no se ha dado por terminada.

Algunas de las propiedades físicas de los agujeros negros discutidas en esta sección y otras más tienen sus aplicaciones más importante en los objetos más energéticos que existen en el universo: los *Núcleos Activos de Galaxias (NAG)*.

§57. Núcleos activos de galaxias

A principios del siglo XX las observaciones de la galaxia elíptica M87 (también conocida como NGC 4486, 3C 274 o Virgo A) hechas por Herber Curtis revelaron según sus palabras "*un curioso jet rectilíneo. . . aparentemente conectado con el núcleo por una línea de material.*" Estas observaciones ópticas no fueron seguidas después por Curtis y no fue sino hasta el desarrollo de la radioastronomía en la década de los 1960's cuando el tema de jets emanando del núcleo de ciertas galaxias se convirtió en un tema de mucho interés

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

en la astrofísica. La galaxia M87 mostrada en la Figura I.4 muestra como se ve hoy en día el jet óptico que por primera vez describió Curtis.

Inmediatamente después de la segunda guerra mundial, científicos que estuvieron involucrados en el desarrollo de radares en la misma comenzaron a analizar la naturaleza de la radiación cósmica en frecuencias de radio. Hey y sus colegas en el Grupo de Operaciones de la Armada del Reino Unido descubrieron la primera fuente discreta de radio en la constelación de Cygnus. Esta fuente se llama hoy en día Cygnus A (cf. Figura VII.5) y sigue siendo la *radio galaxia* más brillante en el cielo. De hecho es la radio galaxia por excelencia.

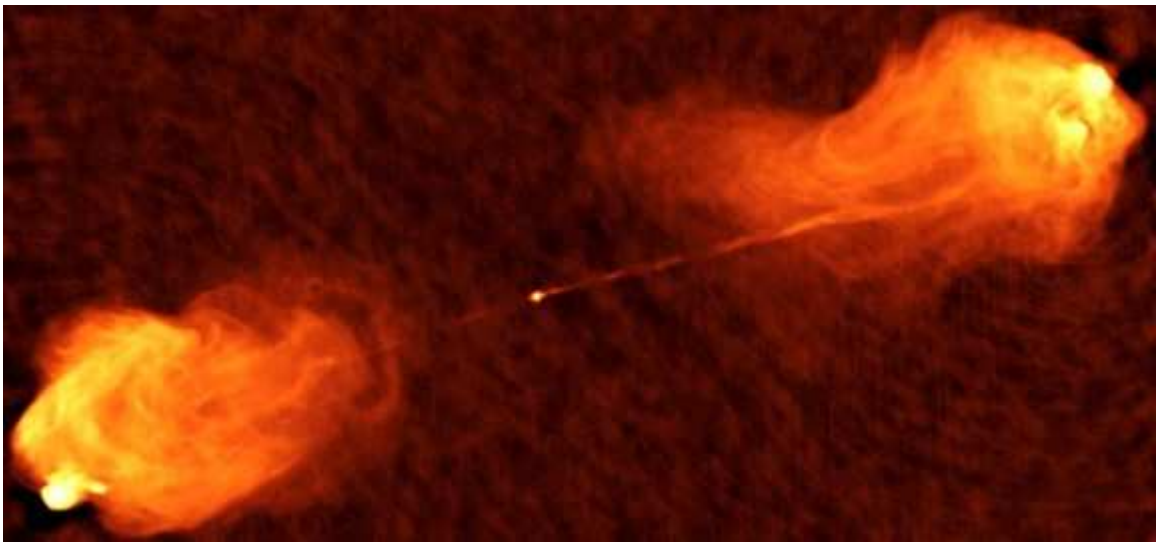

Figura VII.5: Imagen de alta resolución de la radio galaxia por excelencia, Cygnus A (3C 405) a 5 GHz. Dos jets simétricos de partículas calientes y de movimiento rápido son generados en las regiones centrales de la galaxia que lo contiene. Los jets se expanden e interaccionan con el medio intergaláctico formando los *radio lóbulos* que se extienden por decenas de kiloparsecs en las extremidades de la radio galaxia. Esta fuente se extiende alrededor de 150 kpc de un lado a otro. Cuando la galaxia es observada en frecuencias ópticas, su tamaño es menor a un décimo de la longitud observada en radio. La imagen fue obtenida con ayuda del Very Large Array (VLA) por John Conway y Philip Blanco y se encuentra en `http://mamacass.ucsd.edu:8080/people/pblanco/cyga.html`.

Para la década de los 1960's, los astrónomos comenzaron a convencerse que había señales de actividad peculiar en los centros de varias galaxias. Estas galaxias tenían concentraciones

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

intensas de luz azul, bastante distinta de la radiación característica recibida de agregados de estrellas y gas, que son las fuentes normales de radiación en una galaxia. El espectro de esta nueva fuente de radiación poseía exceso de radiación azul y ultravioleta para provenir incluso de las más calientes y masivas estrellas. En algunos casos se encontró que incluso las fuentes de radiación eran tan brillantes como la galaxia misma y que variaban con el tiempo. Las galaxias que contenían estas fuentes centrales fueron llamadas *Núcleos Activos de Galaxias* (NAG). Las observaciones hechas en radio frecuencias mostraron que algunas clases de estas radio galaxias contenían *chorros o jets* angostos de gas rápido. Muy probablemente todas las galaxias poseen una forma de actividad en su núcleo asociado con un *agujero negro supermasivo*. Las luminosidades de estos núcleos pueden variar entre 10^{36} W hasta 10^{40} W, es decir, en ocasiones hasta $10^{13}\,L_\odot$. Estas regiones centrales son tan brillantes que resultan capaces en ocasiones de opacar a la luz de las $\sim 10^{10}$ estrellas en la galaxia entera. La radiación proveniente de estos núcleos no proviene de estrellas normales y en ocasiones varía en escalas de tiempo menores a días. De esta manera es posible poner una cota superior al tamaño de la región nuclear que produce la radiación. En efecto, a menos que movimientos relativistas sean involucrados, un objeto no puede variar en una escala de tiempo menor que el tiempo que tarda la luz en cruzar el sistema. De esta manera, si la intensidad de un objeto varía por un factor considerable (digamos de 2) en una escala de tiempo menor a Δt, el tamaño de este mismo debe ser menor a $c\Delta t$. Así se puede encontrar el tamaño de esta *maquinaria central*. Cabe hacer notar que la emisión en óptico e infrarrojo no proviene toda de la maquinaria central. Muy probablemente esta ha sido absorbida primeramente por nubes de gas y polvo y reemitida por estas mismas.

La manera de clasificar los NAGs es un tema excesivamente confuso y confundible. Esto es primeramente por las limitaciones observacionales que se presentan. Por ejemplo, no es posible cubrir todo el espectro para todos los objetos, lo cual implica que sea difícil reconciliar una clasificación hecha en las propiedades de la emisión en rayos–X y otro en las propiedades ópticas de distintos muestreos. Históricamente existen otros problemas. Por ejemplo, la frase *cuasar* que proviene de la palabra *casi–estelar* es un ejemplo de la manera de confundir totalmente a estos objetos. De cualquier manera, la mejor forma de intentar hacer una clasificación y unificación del gran mundo de los NAGs es un gran reto de la investigación moderna. Hoy en día esta investigación tiene como finalidad el suponer a los procesos físicos que se llevan a cabo en diferentes NAGs como simples y sencillos, a

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

pesar del carácter confuso de las observaciones.

Los NAGs con luminosidad baja incluyen principalmente a las llamadas *galaxias Seyfert* y los más energéticos se denominan cuasares. Estos cuasares son tan energéticos que pueden ser observados a distancias tan grandes que la luz proveniente de la galaxia progenitora no puede ser vista. Algunos de estos NAGs son fuentes brillantes en radio.

Los cuasares son importantes para la cosmología pues sirven como sondas del universo a grandes corrimientos al rojo. Algunos de ellos están a corrimientos al rojo tan grandes que la línea Lyman–α de hidrógeno (a 121.6 nm) que normalmente se encuentra en el lejano UV se observa desplazada en el lejano rojo del espectro visible (a 700 nm aproximadamente).

Varios de los detalles de los NAGs son desafortunadamente poco entendidos. La mayoría de los modelos atribuyen la energía proveniente de los NAGs a la acreción de gas hacia un agujero negro de $\sim 10^8\,M_\odot$.

La razón de que sea un agujero negro y no otra cosa es debido a varias observaciones. En primer lugar, la rápida variabilidad de emisión en ocasiones hasta de 1 min en galaxias Seyfert de baja potencia. Esto implica que la distancia que puede recorrer la luz en este intervalo de tiempo sea tan pequeña como el radio de Schwarzschild para un agujero de $10^7\,M_\odot$. En segundo lugar, los NAGs son eficientes en convertir la masa en reposo en energía radiante. Para mostrar esto, lo que se hace es sumar la potencia o luminosidad de todos los cuasares observados en la tierra y se calcula cual es la densidad de energía radiante asociada con la radiación emitida. Resulta que esta es $\sim 10^5\,h^{-3}\,M_\odot c^2$ por galaxia brillante. Aquí h es la constante de Hubble en unidades de $100\,km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}$. Todas las observaciones muestran que la gran mayoría de cuasares están identificados con galaxias brillantes. Ahora bien, estas masas nucleares muy probablemente han crecido desde la época de máxima actividad de cuasares. De esta manera, calculando la masa central en las galaxias cercanas, podemos poner un límite inferior a la eficiencia ϵ definida como el cociente entre la energía radiante de emisión entre la energía de la masa nuclear. El resultado que se obtiene de este análisis es $\epsilon \gtrsim 0.01h^{-3}$. Despreciando todos los errores e incertidumbres hechas en estos cálculos, resulta incluso difícil imaginar como se puede llevar a cabo una conversión tan eficiente de masa en energía por procesos atómicos y nucleares. La única fuente de energía a la mano es la energía gravitacional. La rápida variabilidad de la emisión implica que un único objeto está presente en la producción de esta radiación. Resulta que los únicos objetos que pueden llevar a cabo estos procesos

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

son agujeros negros supermasivos o estrellas supermasivas, sin embargo puede mostrarse que las estrellas supermasivas (i.e. $M \sim 10^{100}\, M_\odot$)son inestables pues no pueden evadir inestabilidades dinámicas.

La formación de este agujero negro central implica que este mismo crecerá subsecuentemente mediante la acreción de gas o mediante la acreción de estrellas, planetas y demás material que lo rodee. Si esto es cierto, uno esperaría la formación de discos de acreción alrededor de estos agujeros, sobre todo porque para producir energía como lo hace un cuasar hay que tener una muy eficiente forma de convertir masa en energía. Cuando lineas espectrales son emitidas por la superficie de un disco de gas en rotación, una componente de las mismas estará cargada hacia el rojo y la otra hacia el azul debido al efecto Doppler. En otras palabras, se espera que las lineas de emisión de algunos elementos tengan un pico doble. Esto es justamente lo que se observa hoy en día con los observatorios de rayos-X en el espacio exterior (cf. Figura (VII.6)).

Otra de las razones a favor de agujeros negros es que la gran mayoría de las radio fuentes brillantes con espectro plano, i.e. el flujo $F \propto I^\nu$ con $\nu \approx 0.6$ e I la intensidad, es decir, muestran *expansiones superlumínicas* (cf. sección §9). Estas expansiones superlumínicas ocurren cuando existe un fluido relativista y velocidades relativistas se esperan si existen fuertes campos gravitacionales, como los de un agujero negro.

Los radio ejes de los radio jets observados permanecen fijos por distancias inmensas, lo cual implica que estos mismos han permanecido fijos en dirección por tiempos mayores a 10 millones de años en varias fuentes. Un giroscopio compacto, como un agujero de Kerr es una manera natural de llevar a cabo este resultado.

Por si lo anterior fuera poco, resulta que los estudios espectroscópicos de la mayoría de los núcleos galácticos poseen débiles lineas de emisión anchas. Esto sugiere que la mayoría de los núcleos galácticos tienen fuertes potenciales gravitacionales.

§58. Discos de acreción alrededor de agujeros negros

En la sección §36 discutimos muy brevemente como funciona un disco–α de acreción. El mismo análisis no–relativista (que resulta ser muy parecido a la descripción relativista) puede extenderse para agujeros negros. El problema es que para el caso de agujeros negros no se tiene una superficie sólida (como la superficie de una estrella) en donde acabe el disco

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

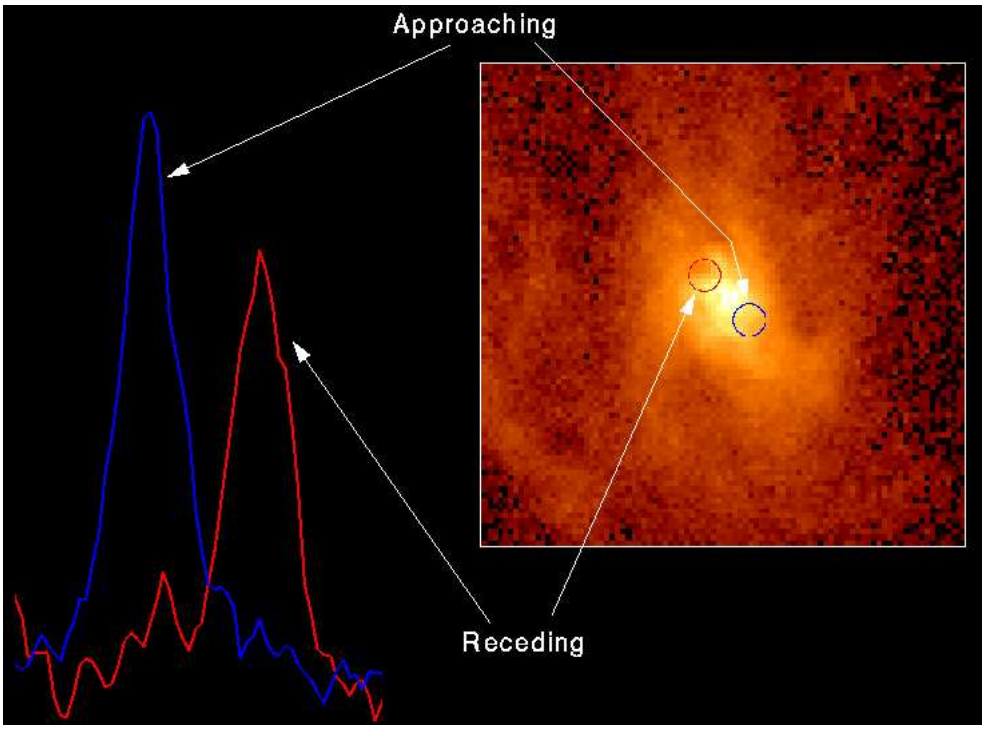

Figura VII.6: Líneas espectrales dobles producidas por el gas rotando sobre un disco de acreción alrededor de un agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87. La línea se ve doble debida al efecto Doppler. Esta imagen fue tomada con el telescopio espacial Hubble y obtenida de `http://hubblesite.org`.

de acreción y por lo tanto necesitamos una condición de frontera adecuada que sustituya a la ecuación (36.33). El final del disco de acreción corresponde a la última órbita estable que es $3r_S$ para el caso de agujeros negros de Schwarzschild. Supongamos que la última órbita estable se encuentra a la distancia r_1. La condición Newtoniana para que la materia caiga hacia el agujero es que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{L}^2}{I} \leq \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_1}, \tag{58.1}$$

en donde $\mathfrak{L}$ es el momento angular de la partícula de prueba que orbita alrededor del agujero con masa M, e $I = mr_1^2$ es el momento de inercia alrededor del agujero en la última órbita estable. El lado izquierdo de la ecuación (58.1) es la energía rotacional de

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

la materia que es menor que la energía de amarre a la distancia r_1 –lado derecho de la ecuación (58.1). En términos del momento angular específico (momento angular por unidad de masa) $J = \mathfrak{L}/m$ la ecuación (58.1) es

$$J \leq \sqrt{GMr_1}. \tag{58.2}$$

En otras palabras, el momento angular con el cual la partícula de gas llega a la última órbita estable debe ser menor que la cantidad $\sqrt{GMr_1}$. Por comodidad, escribamos la taza de momento angular $\dot{\mathfrak{L}}$ de la partícula en la posición r_1 como

$$\dot{\mathfrak{L}} = \beta \dot{m} \sqrt{GMr_1} \tag{58.3}$$

con $\beta \leq 1$. La condición (58.3) remplaza a la ecuación (36.33). De aquí se sigue que la luminosidad $L(r)$ producida por un anillo del disco Δr está dada por (cf. ecuación (36.38))

$$L(r) = \frac{3G\dot{m}M_\star}{2r^2} \left\{ 1 - \beta \left(\frac{r_1}{r} \right)^{1/2} \right\} \Delta r. \tag{58.4}$$

La luminosidad total del disco se obtiene integrando la ecuación (58.4) desde r_1 hasta infinito

$$L = \frac{3G\dot{m}M_\star}{2} \int_{r_1}^{\infty} \left\{ 1 - \beta \left(\frac{r_1}{r} \right)^{1/2} \right\} \frac{dr}{r^2} = \left(\frac{3}{2} - \beta \right) \frac{G\dot{m}M}{2r_1} = \xi \dot{m} c^2, \tag{58.5}$$

en donde

$$\xi := \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \beta \right) \frac{r_S}{r_1}.$$

De la ecuación (56.1) se ve que cuando $\beta = 1$ entonces $\xi \approx 0.8$ para discos de acreción alrededor de agujeros de Schwarzschild y $\xi \approx 0.5$ para discos en corrotación con agujeros negros de Kerr.

§59. Leyes de escala en agujeros negros

Es curioso que existan agujeros negros de varios tamaños en la naturaleza. Sobre todo, aquellos de baja masa como las estrellas colapsadas y los de gran masa, como los agujeros

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

negros supermasivos en los centros de varias galaxias y que ambos objetos debido a la acreción que generan, produzcan discos de acreción y jets. Existen leyes de escalamiento que nos permiten concluir que quizás la física asociada a los fenómenos de la naturaleza que ocurren alrededor de los agujeros negros astrofísicos de estos diversos tamaños son el mismo juguete físico, pero reescalado.

Como vimos en la sección §34, la *luminosidad de Eddington* L_{Edd} es la luminosidad crítica asociada con acreción esférica mediante la cual se ejerce una presión de radiación sobre un par electrón–protón (cf. ecuación (34.1)). Cualquier fenómeno que tenga una duración de unos cuantos tiempos dinámicos (esto excluye a las supernovas por ejemplo) debe tener una luminosidad L tal que $L < L_{edd}$. Además la luminosidad de acreción está dada por la ecuación (36.3) que para un disco de acreción alrededor de un agujero negro toma el valor de la ecuación (58.5).

Si suponemos por ejemplo que la luminosidad $L \propto M$ entonces L/L_{Edd} tiene el mismo valor para cualquier agujero, independientemente de su masa. Esto implica que la importancia relativa de la gravedad y la presión de radiación es la misma para cualquier agujero.

El tiempo que tarda una partícula de prueba en dar una vuelta alrededor de la última órbita estable alrededor de un agujero es aproximadamente $10^{-4}(M/M_\odot)$ seg. El valor exacto depende de si el agujero tiene o no rotación. Este valor de tiempo escala con M.

Si existe un disco de acreción alrededor de un agujero negro, el área de su superficie es proporcional[†] a M^2. Así, la luminosidad por unidad de área escala como $\dot{M}M/M^2 \propto M^{-1}$. Debido a que la intensidad radiada por unidad de área va como T^4, entonces el espectro característico de tipo cuerpo–negro varía como $M^{-1/4}$. De esta manera, para agujeros negros supermasivos la radiación emitida se encuentra en el UV, cuando para agujeros negros estelares, la emisión es en rayos-X.

§60. Jets extragalácticos

Las velocidades de las partículas que caen hacia un agujero negro por medio del proceso de acreción sobre un disco de acreción son $\gtrsim c/2$. Los campos magnéticos en estas regiones

[†]En efecto, utilizando los resultados de la sección §36 se obtiene que $M \propto \int_{r_*}^{R} \Sigma\, da$. Pero como $\Sigma \propto 1-(r_*/r)^{1/2}$ y como generalmente $r_* \ll R$, se obtiene de inmediato que $M \propto R^2$.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

tan cercanas a los agujeros negros son lo suficientemente intensos ($\lesssim 1\,\mathrm{T}$) como para acelerar a las partículas a velocidades ultrarelativistas. Estos campos magnéticos y las partículas que aceleran son los responsables de emisión en radio de los NAGs.

Una de las características más importantes de los NAGs es que frecuentemente presentan radiación no–térmica (es decir, radiación no tipo cuerpo negro) producida por campos magnéticos y electrones que emiten *radiación sincrotrónica*. Esta energía y radiación se canaliza en chorros o jets provenientes del centro de la maquinaria central a velocidades ultrarelativistas (¡en algunos casos hasta de $0.999c$!) por miles parsecs, pero en ocasiones llegan a medir unos cuantos millones de parsecs. Estos jets son tan distintos y peculiares en su exactitud que más o menos es como si yo, desde mi oficina en Ciudad Universitaria tuviese una manguera lanzando gas de manera tan precisa que pudiese dirigir este jet a lo largo de toda la atmósfera terrestre hasta Australia. Estos objetos se denominan *radio fuertes* y constituyen más o menos el $10\,\%$ de toda la población de NAGs.

Utilizando argumentos de *energía mínima* que consisten en ver la energía existente en los lóbulos de las radio galaxias, puede calcularse la energía mínima que debe ser canalizada sobre los radio jets para producir la radiación observada. Resulta que estas energías mínimas son del orden de 10^{52} J. ¡Esto es inmenso! Corresponde a la energía en reposo de $\sim 10^5$ estrellas.

La manera más sencilla de entender como se lleva a cabo el flujo de los jets (sobre todo su alto índice de colimación) es mediante leyes de conservación.

Tarea 22

Consideremos un jet cuyo flujo es no–relativista y su índice politrópico es de $5/3$. *Aproximemos al mismo como un flujo en una sola dimensión cuya sección transversal de área* A *varía a lo largo de su trayectoria. Si la taza de masa inyectada al jet por unidad de tiempo* t *(i.e. la* descarga*) está representada por* $\dot{M}$ *y la velocidad del jet es* v, *entonces calculemos la potencia* L, *es decir la cantidad de energía por unidad de tiempo y la fuerza* F *en el mismo.*

(I) *Utilizando las ecuaciones de conservación de masa, conservación de entropía y la ecuación de Euler vistas en el capítulo* IV *para flujo no–relativista, calcula el valor de* $\partial(\rho v^2/2 + \rho\epsilon)/\partial t$. *El término entre paréntesis es la energía total (cinética e*

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

interna) por unidad de volumen de una partícula de fluido, sin considerar efectos gravitacionales del mismo. Muestra que la razón de cambio de esta energía por unidad de tiempo puede escribirse de forma conservativa constituyendo la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right\}=-\,div\,\left\{\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+\omega\right)\right\}. \tag{60.1}$$

Integrando esta ecuación sobre un volumen determinado y utilizando el teorema de la divergencia en el lado izquierdo, así como escribiendo a la entalpía específica w *como* $w=\epsilon+P/\rho$ *es evidente el significado de esta ecuación. El cambio de la energía por unidad de tiempo en el volumen tomado por la integración es igual al flujo de energía que pasa a través de las fronteras del mismo volumen.*

(II) *Utilizando el inciso anterior o de alguna otra manera, muestra que la derivada total* d/dt *de la energía por unidad de volumen* $E=\rho v^2/2+\rho\omega$*, bajo las suposiciones de que* $dp/dt=0$*, así como* $\partial p/\partial t=0$*, puede escribirse como*

$$L:=\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d\rho}{dt}v^2\left\{1+\frac{2}{M^2(\kappa-1)}\right\} \tag{60.2}$$

donde $M=v/c$ *es el* número de Mach *del material dentro del jet,* $c:=\sqrt{(\partial P/\partial\rho)_s}$ *es la velocidad del sonido en el jet,* κ *es el índice politrópico del gas en el jet y aquí se utilizó la famosa relación termodinámica* $\omega=c^2/(\kappa-1)$*. El significado de la ecuación* (60.2) *es claro. El primer término del lado derecho de esta igualdad es la energía cinética transportada por el fluido del jet. El segundo término es la energía interna más el trabajo "*pV*",*

(III) *De la ecuación de Euler y continuidad muestra que*

$$\frac{d(\rho\boldsymbol{v})}{dt}=\boldsymbol{v}\frac{d\rho}{dt}-grad\,P. \tag{60.3}$$

Con esto muestra que para un gas politrópico en una sola dimensión (la coordenada

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

x) *en el cual* $\partial\rho/\partial t = 0$ *se sigue que*

$$F := \frac{d}{dt}(\rho v) = v\frac{d\rho}{dt}\left\{1 - \frac{1}{\kappa M^2}\right\}, \tag{60.4}$$

donde v *es la componente de la velocidad en la dirección* x. *El significado de esta ecuación es similar al de la ecuación* (60.3). *El primer término es el flujo de momento y el segundo término está constituido por las fuerzas de presión térmica.*

(IV) *Si el jet es adiabático y estacionario* ($\partial/\partial t = 0$), *entonces utilizando la ecuación de continuidad en su forma integral, muestra que la descarga, i.e. la cantidad de masa por unidad de tiempo que atraviesa una determinada área transversal* A *del jet satisface la siguiente relación*

$$\dot{M} = \rho v A = const. \tag{60.5}$$

Ahora bien, supongamos que el gas del jet está en equilibrio de presiones con su medio ambiente, de tal manera que la presión p *disminuye a lo largo del jet (la presión del gas en una galaxia disminuye a medida que la distancia al centro de la misma se incrementa). Suponiendo que el índice politrópico es* $\kappa = 5/3$, *es decir, el gas es monoatómico entonces* $\rho \propto A^{-1}v^{-1} \propto p^{3/5}$.

(VI) *Muestra con esto que el número de Mach* $M \propto p^{-4/5}A^{-1}$ *y que* $v \propto p^{-3/5}A^{-1}$

(VII) *Construye una gráfica que describa al área como función de la presión y muestra que pasa por un mínimo justamente en donde el gas dentro del jet se convierte en transónico (pasa de subsónico a supersónico). De esta manera, para que el jet se convierta en supersónico tiene que pasar por el* cohete convergente–divergente de Laval. *Este tipo de configuración es la que se tiene en las turbinas de los grandes cohetes que viajan al espacio.*

Puede mostrarse que en la parte subsónica del flujo, la presión y la densidad son más o menos constantes. En la parte supersónica la velocidad es más o menos constante, de aquí que con lo mencionado arriba $A \propto v^{-3/5}$. Debido a que la densidad y la presión en la gran mayoría de las galaxias escala como $1/r^2$, entonces el ángulo que subtiende el jet con el núcleo es $A^{1/2}r^{-1} \propto r^{-2/5}$.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Con esto hemos mostrado que para colimar un jet es necesario que su presión disminuya con la distancia, independientemente de la expansión que este mismo lleva en su sección transversal de área A.

Para hacer un tratamiento relativista en el flujo del jet, consideremos un plasma ultrarelativista de tal forma que su ecuación de estado esté dada por $p = e/3 \propto n^{4/3}$, es decir el índice politrópico $\kappa = 4/3$.

Tarea 23

(I) *Utilizando el hecho de que el vector de flujo de energía (energía por unidad de área por unidad de tiempo) es* $cT^{0\alpha}$*, donde* c *es la velocidad de la luz y* T^{km} *es el tensor de energía–momento, muestra que la luminosidad* L *puede escribirse como*

$$L = 4p\gamma^2 v A, \tag{60.6}$$

donde γ *es el factor de Lorentz para la velocidad* v*.*

(II) *Utilizando las componentes espaciales del tensor de energía momento* $T_{\alpha\beta}$ *(el tensor de esfuerzos) muestra que la fuerza que produce el jet está dada por*

$$F = T_{xx}A = \left\{4\gamma^2 v^2/c^2 + 1\right\} pA \tag{60.7}$$

(III) *De manera similar a la que mostramos la ecuación de continuidad en el caso relativista, muestra que el número de partículas por unidad e tiempo* $\dot{n}$ *es conservado*

$$\dot{n} = n\gamma v A = const. \tag{60.8}$$

Esta relación es evidentemente una consecuencia directa de la ecuación de continuidad para el caso relativista.

(IV) *Utilizando las ecuaciones* (60.6) *y* (60.8) *muestra que la sección de área transversal* A *del jet cumple con*

$$A \propto \gamma^2/v, \tag{60.9}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

y que el mínimo de esta área sucede para el punto transónico en el cual $v = c/\sqrt{3}$, *que corresponde al valor de la velocidad del sonido para flujos relativistas.*

Esta es la manera más sencilla de ver como funciona un jet relativista. Evidentemente hay muchas omisiones en este análisis. Por ejemplo, turbulencia dentro del mismo causada por el arrastre entre las paredes del jet y su medio ambiente debe ocurrir, así como la generación de ondas de choque internas al jet debido a variaciones de velocidad y/o curvaturas en la estructura del jet. Además debe existir perdida de energía por radiación del plasma. Sin embargo, quizás la mayor omisión a todo este análisis es el hecho de que estos jets son flujos hidromagnéticos. Es decir, los campos magnéticos amarrados al plasma del jet deben ser capaces de enfocar y colimar al jet.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Capítulo VIII

Cosmología

Una de las aplicaciones más obvias de la teoría general de la relatividad es su uso en la dinámica del universo en su totalidad. Existen cuatro fuerzas en la naturaleza: fuerza fuerte, fuerza débil, fuerza eléctrica y fuerza gravitacional. De éstas, las fuerzas fuerte y débil son de corto alcance (su influencia es sólo notable a distancias atómicas). Las fuerzas restantes tienen largo alcance, sin embargo al considerar el universo a larga escala resulta que el efecto neto de la fuerza electromagnética producido por cargas positivas y negativas tiende a cancelarse. Así pues, la única fuerza que juega un papel significativo en la dinámica y en la evolución del universo es la fuerza gravitacional.

§61. Observaciones cosmológicas

Al observar el universo desde nuestro planeta tierra, en una noche clara, lo primero que salta a la vista es el gran grado de inhomogeneidad que éste posee. Existen estrellas esparcidas por todos lados de manera un tanto cuanto irregular. Al realizar observaciones con diversos instrumentos, se observa que las estrellas en el universo se encuentran dentro de sistemas en forma de "islas" llamados *galaxias*. De la misma manera, al analizar la distribución de estas galaxias en el universo se encuentra que localmente (en escalas cortas) la estructura fundamental del universo (las galaxias) están distribuidas inhomogéneamente. Sin embargo, esta distribución de galaxias se vuelve uniforme (homogénea) a medida que se consideran escalas cosmológicas, i.e. tan grandes que constan de un número suficientemente grande de cúmulos de galaxias.

Existen diversos mapeos del cielo que muestran la validez de las afirmaciones anteriores utilizando en algunos de ellos hasta cientos de miles de galaxias. Por ejemplo, el Lick Survey of Galaxies, el Cambridge APM Survey, Las Campanas redshift survey y el 2dF Galaxy Redshift Survey por mencionar algunos de los más famosos en la actualidad. De todos estos mapeos (cf. sección §4 y Figura VIII.1) se infiere que la distribución de galaxias es uniforme a gran escala y que tiene una inhomogeneidad notable en escalas menores a unos cuantos Mpc. De hecho existen largos *espacios vacíos* y *paredes de galaxias* en estos mapeos. Con esto ha sido posible observar que la topología del universo es tal que la distribución de las galaxias en el universo se asemeja a la estructura de una esponja. Las galaxias (material de la esponja) se encuentra distribuido en la esponja de forma multiconexa. En otras palabras, todas las galaxias se encuentran interconectadas unas con otras, pero existen hoyos los cuales poseen multiconexiones entre ellos. Este tipo de estructura topológica únicamente existe en tres dimensiones, pero no en dos. Es claro que si la estructura del universo es como esponja, necesariamente la distribución a larga escala del mismo debe ser uniforme.

Otra manera de darse cuenta de la homogeneidad a larga escala del universo fue hecha por Hubble. El flujo de radiación electromagnética (cantidad de energía por unidad de segundo por unidad de área) F está relacionado con la magnitud aparente mediante la ecuación (6.2). De tal manera que si se realiza un mapeo de galaxias hasta una magnitud aparente máxima m, correspondiente a una densidad de flujo F, entonces una galaxia con luminosidad intrínseca L puede ser observada a una distancia r tal que la ecuación (6.1) es válida. Ahora bien, si el número de galaxias por unidad de volumen que tienen una luminosidad L es N_0 entonces el número de galaxias observadas dentro de un ángulo solido Ω a una distancia r es

$$N(\geq F) = \Omega N_0 r^3 = \Omega N_0 \left(\frac{L}{4\pi F}\right) \propto F^{-3/2} \tag{61.1}$$

Sustituyendo la relación (61.1) en la ecuación (6.2) se obtiene que

$$N(\leq m) \propto 10^{0.6m} \tag{61.2}$$

Hubble fue el primero en darse cuenta de esta propiedad seguida por el número de galaxias por unidad de volumen. Diversas observaciones muestran que N sigue el valor

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

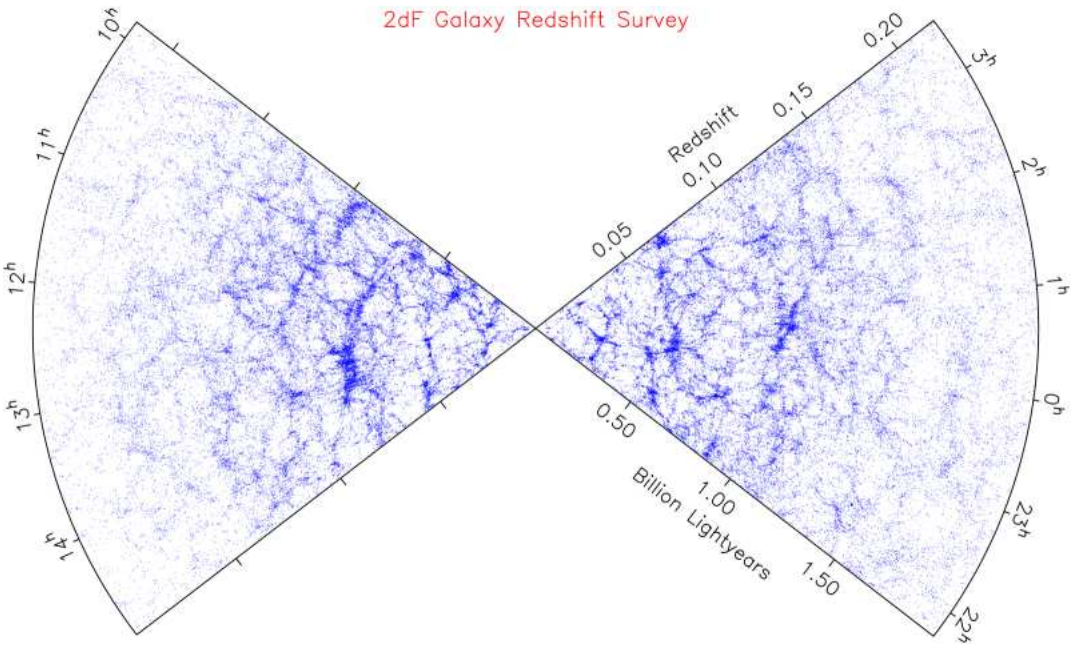

Figura VIII.1: La figura muestra el mapeo del 2dF (two degree Field) Galaxy Redshift Survey . El mapeo fue hecho con mas de 210000 galaxias hasta corrimientos al rojo $z \lesssim 0.5$ utilizando el Telescopio Anglo-Australiano. Las zonas en blanco son regiones no observadas. Nuestra galaxia se encuentra en el centro del diagrama. Las líneas radiales miden el corrimiento al rojo de la galaxia en cuestión y por lo tanto, su distancia a nuestra galaxia. El ángulo polar en este diagrama polar mide la declinación (altitud en la esfera celeste). Las galaxias han sido proyectadas todas en un plano arbitrario de ascensión recta (longitud en la esfera celeste). Observaciones como esta han confirmado correctamente alto grado de homogeneidad del Universo a gran escala. La imagen fue tomada de `http://magnum.anu.edu.au/~TDFgg`.

indicado por la ecuación (61.2) hasta una magnitud aparente $m \sim 22$.

Finalmente, una de las observaciones más importantes para corroborar la isotropía y homogeneidad del universo se obtiene mediante las observaciones de la radiación cósmica de fondo en microondas (cf. Figuras I.11 y I.12), observada en detalle principalmente por el satélite COBE (COsmic Background Explorer) y el satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). El espectro de esta radiación es un cuerpo negro perfecto radiando a una temperatura de 2.728 K. Las desviaciones de cuerpo negro son menores a 0.03 % de su intensidad máxima en el intervalo de longitud de onda entre 0.5–2.5 mm. La distribución de

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

esta radiación es isotrópica hasta un nivel de una parte en 10^5 en todas las escalas mayores a 10°. Por arriba de estos niveles en las fluctuaciones de la intensidad de la radiación cósmica de fondo se observan fluctuaciones reales en el cielo. Éstas son cruciales para entender el origen de la formación de las estructuras primordiales en el universo: las galaxias.

De estas observaciones se sigue que la manera natural de comenzar con un entendimiento del universo a gran escala es mediante la construcción de modelos cosmológicos que sean isotrópicos y homogéneos.

§62. Ley de Hubble

La relación de Hubble mencionada en la sección anterior fue derivada para distancias de 2 Mpc alrededor de nuestra galaxia. Hoy en día se utiliza el método de la *relación entre corrimiento al rojo y magnitud*. Está relación está basada en el hecho de que si todas las galaxias tienen la misma luminosidad L entonces esperamos que $S = L/4\pi r^2$ y que $m = -2.5 \log S + \text{const} = 5 \log r + \text{const}$. El *corrimiento al rojo* z se define como (cf. sección §40)

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \tag{62.1}$$

La frecuencia de un sistema de referencia inercial (nosotros) a otro sistema de referencia inercial (otra galaxia) que se mueve radialmente del primero con velocidad $v \ll c$ está dada por la ecuación (40.1) (cf. sección §18). Por lo tanto,

$$1 + z = \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right)^{1/2}. \tag{62.2}$$

De esta manera, para corrimientos al rojo pequeños $v/c \ll 1$ se obtiene

$$v = cz, \tag{62.3}$$

que es la famosa *ley de Hubble*.

Por otra parte, si el universo está en expansión uniforme al tiempo presente (¡hoy!), entonces la distancia entre dos puntos debe incrementarse por el mismo factor en un determinado intervalo de tiempo. En otras palabras,

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$\frac{r_1(t_2)}{r_1(t_1)} = \frac{r_2(t_2)}{r_2(t_1)} = \ldots = \frac{r_n(t_2)}{r_n(t_1)} = \ldots = \alpha = \text{const}, \tag{62.4}$$

en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$. De esta manera la recesión de velocidad de una galaxia con respecto al origen es

$$v_n = \frac{r_n(t_2) - r_n(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(\alpha - 1)}{t_2 - t_1} r_n(t_1) := H_0 r_n(t_1). \tag{62.5}$$

De aquí que un universo en el cual la distribución de galaxias se mueve uniformemente satisface la relación

$$v = H_0 r, \tag{62.6}$$

que es la forma tradicional, de enunciar la *ley de Hubble*.

§63. Métrica de Robertson–Walker

La métrica de Robertson–Walker es la métrica de Minkowski de todos los posibles universos en expansión isotrópica. Debido a que la curvatura del espacio es una manifestación de la curvatura del espacio–tiempo, entonces la curvatura del espacio debe ser isotrópica. De esta manera la geometría del espacio debe ser tal como la curvatura de los espacios isotrópicos que analizamos en la sección §47. En esa sección vimos que la parte espacial de la métrica de los espacios isotrópicos curvos está dada por la ecuación (47.5) en términos de las coordenadas "esféricas" $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ y/o $(x,\ \theta, \varphi)$.

El concepto más importante en el estudio de la cosmología es el llamado *principio cosmológico*, el cual afirma que "no vivimos en un lugar privilegiado del universo". De aquí se sigue que nuestra galaxia se encuentra localizada en un lugar típico del universo y que cualquier otro observador localizado en cualquier otra parte del universo a la misma época cósmica que la nuestra observa la misma estructura a larga escala que nosotros observamos. De esta manera, cualquier observador a la época cósmica presente observa la misma ley de Hubble de la expansión de las galaxias, la misma radiación cósmica de fondo, la forma de esponja que forman las galaxias, etc.

En las discusiones subsecuentes utilizaremos el concepto de *observador fundamental*.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

Debido a que el universo se expande alrededor de nosotros, introduzcamos un conjunto de observadores que se mueven de tal forma que el universo aparece isotrópico para cada uno de ellos. Así, cada observador fundamental se mueve con el *flujo de Hubble*. Definamos ahora el *tiempo cósmico* como el tiempo propio medido por un observador fundamental[†]. En otras palabras, el tiempo cósmico es el tiempo medido por un observador fundamental desde el origen $t = 0$ en el cual se generó la *gran explosión*[‡]

El problema de utilizar la métrica (47.5) es que, dado que la velocidad de la luz es finita, al observar cualquier objeto astronómico (e.g. las galaxias) estamos viendo el pasado del mismo. En otras palabras, estos objetos están en el cono de luz del pasado centrado en nuestra galaxia en la época presente t_0. La Figura VIII.2 muestra pictóricamente esta situación. La única forma en la que se puede entonces utilizar la métrica (47.5) es utilizándola para una única época.

Para poder utilizar la métrica (47.5) es necesario pensar entonces en ρ como una distancia ficticia escogida de la siguiente manera. Consideremos que tenemos un conjunto grande de observadores, los cuales forman una línea desde nuestra galaxia a otra galaxia. Cada uno de ellos posee una regla y es capaz de medir el intervalo de distancia propia $\Delta\rho$ entre él y su sucesor. Cada uno de estos observadores es instruido para medir el intervalo de distancia $\Delta\rho$ a un tiempo cósmico determinado. La suma de todos estos intervalos la denotamos como ρ. Ésta es una distancia ficticia en el sentido de que no es posible medir ρ de esta manera. Las distancias a las galaxias lejanas se observan de tal manera como fueron vistas en el pasado y no existe forma de proyectar su posición en la época actual sin saber la dinámica del universo. De esta manera, la distancia ρ depende del modelo cosmológico que se elija, que hasta el momento en nuestra discusión es una incógnita.

Ya que el universo está en expansión uniforme, entonces entre el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, la distancia entre dos observadores fundamentales cumple con la relación

[†]La *hipótesis de Weyl* dice que es posible sincronizar todos los relojes asumiendo que las lineas de universo de todos los observadores fundamentales se alejan unas de otras de un punto en común en el pasado.

[‡]En realidad no hay tal cosa como una explosión como veremos más adelante. Una explosión es la inyección de energía en una región suficientemente pequeña del espacio. El problema es que la gente siempre piensa que de una explosión se sigue una expansión (con sobrada razón), pero a la inversa no funciona este argumento. En otras palabras, en lo subsecuente utilizaremos el termino gran explosión (por tradición), teniendo en cuenta que no hubo una explosión a $t = 0$ propiamente dicho. Cabe hacer notar que en sobradas ocasiones, la teoría de la gran explosión es llamada teoría del Big Bang por su nombre en inglés.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

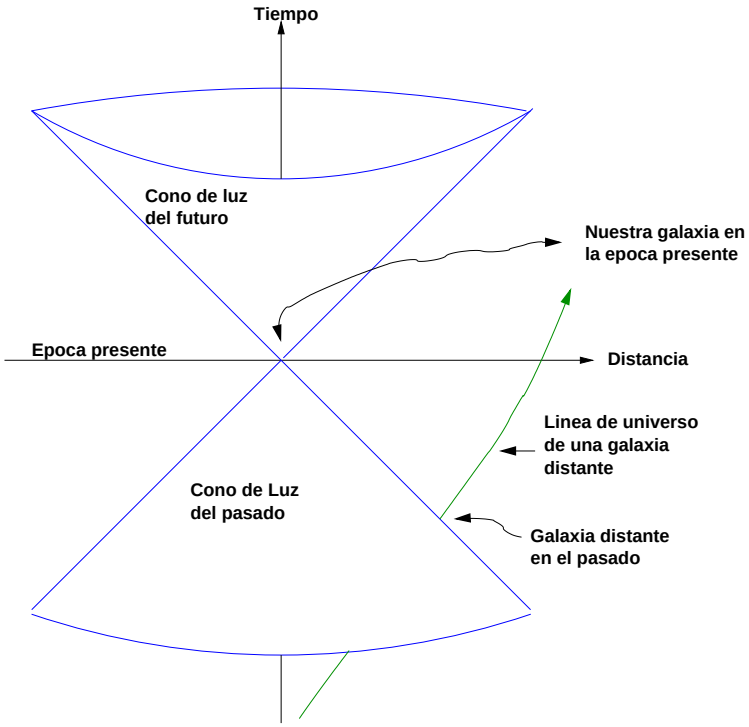

Figura VIII.2: Representación gráfica del cono de luz generado por nuestra galaxia (origen de coordenadas en la figura). Al observar una galaxia distante, gracias a que la velocidad de la luz es finita, únicamente nos llega información proveniente del pasado de esta galaxia. La distancia presente a la que se encuentra es desconocida hasta obtener un modelo de la dinámica del universo.

$$\frac{\rho_1(t_1)}{\rho_1(t_2)} = \frac{\rho_2(t_1)}{\rho_2(t_2)} = \ldots = \text{ const } := \frac{R(t_1)}{R(t_2)}, \tag{63.1}$$

donde $R(t)$ es el *factor de escala*. Este factor de escala describe la manera en la que varía la separación relativa entre dos observadores como función del tiempo cósmico. Es útil normalizar $R(t)$ a una cierta época. Así pues, definamos $R(t_0) = 1$ y pongamos $\rho(t_0) = r$. De esta manera,

$$\rho(t) = R(t)r. \tag{63.2}$$

La coordenada r se denomina frecuentemente como *coordenada radial de comovimiento* y

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

es tal que funciona como una etiqueta amarrada a una galaxia para todo tiempo cósmico. La variación de la distancia propia entre dos galaxias en el universo que se expande es tomada en cuenta mediante el factor de escala $R(t)$.

La isotropía del universo significa que las distancias ortogonales a la linea de visión deben expandirse de manera análoga a las radiales. En otras palabras,

$$\frac{R_c(t)\sin(\rho/R_c(t))d\theta}{R_c(t_0)\sin(r/R_c(t_0))d\theta} = \frac{R(t)}{R(t_0)} = R(t). \tag{63.3}$$

La solución a esta ecuación es

$$R_c(t) = \Re R(t), \tag{63.4}$$

donde $\Re := R_c(t_0)$. De esta manera, para conservar la isotropía y la homogeneidad del universo, la curvatura κ tiene que variar como $\kappa \propto 1/R^2(t)$.

Sustituyendo las ecuaciones (63.2) y (63.4) en la métrica (47.5) en su forma general se obtiene la *métrica de Robertson–Walker*

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left\{dr^2 + \Re^2\sin^2(r/\Re)d\Omega^2\right\}. \tag{63.5}$$

La métrica (63.5) puede escribirse de otra forma, utilizando la coordenada $x = R_c\sin(r/R_c)$

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{dx^2}{1-kx^2} + x^2d\Omega^2\right\}, \tag{63.6}$$

en donde la curvatura k del tres–espacio está dada por $k = 1/\Re^2$. Existe la posibilidad de reescalar la ecuación (63.6) haciendo el cambio $|k|x^2 \to x^2$ combinado naturalmente con $k \to$ sign $(k) := k$. De esta manera, la ecuación (63.6) toma la forma

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{dx^2}{1-kx^2} + x^2d\Omega^2\right\}, \tag{63.7}$$

con $k = +1,\ 0,\ -1$ cuando la geometría del espacio es de tipo esférica (curvatura positiva), de curvatura plana (Euclídea o de curvatura cero), y de tipo hiperbólico (curvatura negativa) respectivamente.

La ecuación (63.5) representa la métrica para describir al universo. Posee dos incógnitas, el factor de escala $R(t)$ y la constante $\Re$. La manera de encontrar estas mismas es resol-

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

viendo las ecuaciones de Einstein. Evidentemente estas funciones contendrán información sobre la curvatura del espacio y la densidad del universo.

§64. Cosmología observacional

Antes de discutir las ecuaciones que describen la dinámica del universo, mediante la métrica de Robertson–Walker y las ecuaciones de Einstein, veamos las consecuencias que esta métrica impone sobre las observaciones del universo.

Primeramente consideremos un paquete de ondas electromagnéticas con frecuencia ν emitido entre los tiempos t y $t+\Delta t$ por una galaxia distante. En la tierra, un observador fundamental recibe este paquete de ondas en la época presente entre los intervalos t_0 y $t_0+\Delta t_0$. Las ondas electromagnéticas se mueven a lo largo de geodésicas nulas, de tal manera que $ds=0$ en la ecuación (63.5). Suponiendo que la propagación del haz de luz se hizo de manera radial (i.e. $d\theta=0,\ d\varphi=0$), la ecuación (63.5) queda entonces como

$$-dr=\frac{cdt}{R(t)}. \tag{64.1}$$

Supongamos que el frente del paquete de ondas fue emitido al tiempo t y recibido en la tierra al tiempo t_0. De esta manera, para el frente del paquete, integrando la ecuación (64.1) desde la fuente hasta el observador en la tierra se obtiene

$$c\int_t^{t_0}\frac{dt}{R(t)}=-\int_r^0 dr. \tag{64.2}$$

De la misma manera, la parte final del paquete que fue emitida al tiempo $t+\Delta t$ y llego a la tierra al tiempo $t_0+\Delta t_0$ se integra desde la galaxia distante hasta nuestra coordenada en la tierra

$$c\int_{t+\Delta t}^{t_0+\Delta t_0}\frac{dt}{R(t)}=-\int_r^0 dr. \tag{64.3}$$

Combinando las ecuaciones (64.2)-(64.3) se obtiene que

$$0=c\int_{\Delta t}^{\Delta t_0}\frac{dt}{R(t)}\approx c\frac{\Delta t_0}{R(t_0)}-c\frac{\Delta t}{R(t)}$$

y como $R(t_0)=1$ esta relación implica la *dilación del tiempo*

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{R(t)}. \tag{64.4}$$

Al observar a las galaxias distantes desde la tierra, $R(t) < 1$. De esta manera, cualquier fenómeno que ocurra en una galaxia distante, lo observamos con una duración de tiempo mayor aquí en la tierra.

Consideremos ahora que $\Delta t = 1/\nu$ es el periodo en el cual se emiten las ondas electromagnéticas de frecuencia ν, y que $\Delta t_0 = 1/\nu_0$ es el periodo de observación de las mismas. La ecuación (64.4) implica entonces que $\nu_0 = \nu R(t)$, o bien utilizando el *corrimiento al rojo* z

$$z = \frac{\nu_{em} - \nu_{obs}}{\nu_{obs}} = \frac{1}{R(t)} - 1$$

o bien,

$$1 + z = \frac{1}{R(t)} \tag{64.5}$$

La ley de Hubble (62.6) de expansión del universo en términos de distancias propias puede escribirse como

$$\frac{d\rho}{dt} = H_0 \rho, \tag{64.6}$$

de tal manera que sustituyendo la ecuación (63.2) en esta relación se obtiene

$$H_0 = \dot{R}/R. \tag{64.7}$$

Ahora bien, la constante de Hubble H_0 es medida con respecto a la época presente t_0, donde $R(t_0) = 1$. De esta manera $H_0 = \dot{R}|_{t_0}$. La ecuación (64.7) nos permite definir una constante de Hubble $H(t)$ que varia con el tiempo cósmico de la siguiente manera

$$H(t) = \left.\frac{\dot{R}}{R}\right|_t, \qquad H_0 = H(t_0) = \left.\dot{R}\right|_{t_0}. \tag{64.8}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Como mencionamos anteriormente, la expansión del universo combinada con la isotropía del mismo implica que las distancias en las componentes azimutales y polares de la métrica cambien. Si d es la distancia propia en la dirección θ entonces

$$d = \Delta\theta R(t)\,(\mathfrak{R}\sin(r/\mathfrak{R})) = \frac{D\Delta\theta}{1+z},$$

donde hemos introducido la *medida de distancia* $D := \mathfrak{R}\sin(r/\mathfrak{R})$. De aquí se sigue que

$$\Delta\theta = \frac{d(1+z)}{D}. \tag{64.9}$$

Esta igualdad se reduce a la expresión Euclidiana $d = r\Delta\theta$ para corrimientos al rojo pequeños $z \ll 1$ y $r \ll \mathfrak{R}$. Frecuentemente, la ecuación (64.9) se escribe como

$$\Delta\theta = \frac{d}{D_A}, \tag{64.10}$$

para que tenga una semejanza a su equivalente Euclidiano. La cantidad $D_A := D/(1+z)$ se conoce como la *distancia diametral angular*.

La edad del universo hoy t_0, es simplemente el tiempo que tarda un fotón desde la gran explosión ($r = r_{max},\ t = 0$) hasta la época presente $t = t_0,\ r = 0$, en donde r_{max} es el valor de la coordenada en comovimiento correspondiente a un cambio rojo infinítamente grande $z = \infty$ o bien $R = 0$

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \frac{1}{c}\int_0^{r_{max}} R(t)dr \tag{64.11}$$

§65. Ecuaciones de Friedmann

La métrica de Robertson–Walker (63.7) posee dos incógnitas, $R(t)$ y $\mathfrak{R}$. Es necesario utilizar las ecuaciones de Einstein para encontrar una relación de la dinámica del universo que relacione a ambas.

La primera relación que se obtiene utilizando la nulidad de la divergencia del tensor de energía–momento (cf. ecuación (46.27)) es una ley de conservación de energía

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \tag{65.1}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Aquí hemos utilizado el hecho de que la energía interna propia por unidad de volumen de la materia o radiación e está relacionada con su densidad de masa en reposo propia ρ mediante la igualdad $e = c^2\rho$[†]. Multiplicando la ecuación (65.1) por R^3 se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(\rho R^3\right) + \frac{p}{c^2}\frac{dR^3}{dt} = 0. \tag{65.2}$$

Ahora bien, una unidad de volumen en comovimiento ($V = R^3$) tiene una energía interna U tal que $U = c^2\rho R^3$. De tal forma que la ecuación (65.2) puede reescribirse como

$$dU + PdV = 0, \tag{65.3}$$

De acuerdo con la primera ley de la termodinámica, el lado derecho de esta igualdad es TdS, donde T es la temperatura del universo y S su entropía. Así, la expansión del universo se lleva de manera adiabática.

Las siguientes relaciones que se obtienen con las ecuaciones de Einstein describen la cinemática del universo. La primera de ellas fue calculada por Friedmann y la segunda por Raychaudhuri:

$$\dot{R}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2}. \tag{65.4}$$

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G R\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \tag{65.5}$$

Estas dos ecuaciones junto con la relación (65.1) se denominan frecuentemente como las *ecuaciones de Friedmann*.

Con estas relaciones y una relación politrópica[‡] se encuentra el valor del factor de escala R como función del valor del radio de curvatura $\mathfrak{R}$ en la época presente.

[†]En estudios cosmológicos y generalmente en estudios gravitacionales se adopta frecuentemente un sistema de unidades en el cual $c = 1$. De esta manera se habla indistinguiblemente de la densidad de energía ρ y de la densidad de masa ρ de una partícula. En lo subsecuente, nosotros **no** adoptaremos este sistema de unidades. Sin embargo recuerda muy bien que generalmente no se utiliza en ningún lado en cosmología la letra e para representar a la energía interna por unidad de volumen, ¡incluso si no se adopta un sistema de unidades en el cual $c = 1$! Bienvenido al mundo de la confusión.

[‡]La ecuación utilizada generalmente es la de un gas politrópico. En termodinámica relativista un gas politrópico obedece la relación $p \propto n^\kappa$ (cf. ecuación (26.7)). Utilizando la primera ley de la termodinámica (21.7) se sigue que para cualquier gas politrópico, relativista (incluso para el caso de un gas

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

§66. Modelo estándard de Friedmann

El universo como lo percibimos en la época presente está dominado por estructuras masivas denominadas galaxias. Así pues, cualquier presión térmica que realicen estas masas, es despreciable en comparación con la densidad de energía en reposo de las masas (presión es energía interna por unidad de volumen). De esta manera, se define a un conjunto de partículas no–colisionales (e.g. las galaxias) como *polvo*. Este polvo es tal que su presión $p = 0$. Con esto, las ecuaciones de Friedmann y la ecuación de conservación de la energía (65.1) toman un aspecto sencillo. De hecho, la ecuación de energía en este caso implica que

$$\rho = \rho_0 R^{-3}, \tag{66.1}$$

que es justamente la ecuación (23.5) y representa la conservación de la masa.

La ecuación de Friedmann (65.5) combinada con la ecuación (66.1) se transforma en

$$\dot{R}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho_0 R^{-1} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2}. \tag{66.2}$$

Esta igualdad es equivalente a la segunda ecuación de Friedmann (65.4) para este caso. La ecuación (66.2) corresponde a la relación (23.10) si identificamos $\kappa = 2c^2/\mathfrak{R}^2$. Las soluciones ya fueron calculadas en el la sección §23, y como vimos ahí las soluciones con $\mathfrak{R}^2 < 0$ corresponden a universos abiertos (geometría hiperbólica) que se expanden por siempre. Cuando $\mathfrak{R}^2 = 0$ se obtienen universos abiertos (geometría Euclidiana o plana) que también se expanden por siempre. Las soluciones con $\mathfrak{R}^2 > 0$ corresponden a universos cerrados (geometría esférica) en los cuales ocurre un recolapso para un tiempo finito en el futuro.

Cabe hacer notar el hecho de que el universo en expansión para modelos de polvo y el que consideramos en la sección §23 tienen las mismas soluciones debido principalmente a tres causas. La primera es que la física que describe al comportamiento local de la materia, es la misma física que describe su comportamiento a larga escala. Por ejemplo, la curvatura

ultrarelativista para el cual $p \sim e$) y no–relativista, la ecuación de estado está dada por

$$p = (\kappa - 1)e. \tag{65.6}$$

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

del espacio en un milímetro cúbico del universo es igual a la curvatura de todo el universo. La segunda es que el cálculo Newtoniano es valido para todos los observadores que se mueven de tal forma que el universo parece isotrópico para ellos y esto ocurre para todos los observadores fundamentales, tal cual se escogieron en la métrica de Robertson–Walker. La tercera causa es que la validez de la métrica de Robertson–Walker es a lo largo de todo el universo, incluso en escalas mayores a la escala del *horizonte* $r = ct$. Esto no es de extrañarse, pues el principio cosmológico implica que la escala de validez de la física local ocurre también a nivel global.

Es útil definir la *densidad crítica* ρ_c como la densidad límite que debe tener el universo para mantenerse cerrado. Más allá de este límite crítico, el universo es abierto. De la ecuación (66.2) se sigue que

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \tag{66.3}$$

De esta manera se define el *parámetro de densidad* Ω_0 de tal forma que

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c} \tag{66.4}$$

$$= \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2} \tag{66.5}$$

Con esto, la ecuación (66.2) toma la forma

$$\dot{R}^2 = \frac{\Omega_0 H_0^2}{R} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2}, \tag{66.6}$$

cuyas soluciones están dadas por

a) Modelo de Einstein–de Sitter con $\Omega_0 = 1$ (plano):

$$R = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}. \tag{66.7}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

b) $\Omega_0 > 1$ (esférico):

$$R = a(1-\cos\theta), \qquad t = b(\theta - \sin\theta). \qquad \left(a := \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0-1)}, \qquad b := \frac{\Omega_0}{2H_0(\Omega_0-1)^{3/2}}.\right) \tag{66.8}$$

c) $\Omega_0 < 1$ (hiperbólico):

$$R = \alpha(\cosh\phi - 1), \qquad t = \beta(\sinh\phi - \phi). \qquad \left(\alpha := \frac{\Omega_0}{2(1-\Omega_0)}, \qquad \beta := \frac{\Omega_0}{2H_0(1-\Omega_0)^{3/2}}.\right) \tag{66.9}$$

Como caso particular del segundo inciso está el *modelo de vacío* con $\Omega_0 = 0$, también conocido como el *modelo de Milne*. Es interesante ver que en un modelo en el cual la densidad $\rho_0 = 0$ el universo se comporta de manera hiperbólica. Esto puede explicarse con el siguiente argumento. De acuerdo con la ecuación (65.5), la desaceleración de cualquier galaxia es cero. En otras palabras, la velocidad de expansión de cualquier galaxia con respecto al mismo observador fundamental es la misma. De esta manera, todos los observadores fundamentales están en sistemas de referencia inerciales. Así, el tiempo cósmico entre una y otra galaxia está dado por la transformación de Lorentz $t' = (t - vr/c^2)/\sqrt{(1-v^2/c^2)}$. Ahora bien, las condiciones de isotropía y homogeneidad deben ocurrir al mismo tiempo cósmico t' en los sistemas de referencias de los observadores fundamentales. En otras palabras, la hipersuperficie $t' =$ const es normal a la linea de universo de cada observador fundamental (galaxia). Por otra parte, el elemento de distancia dl en un punto dado P sobre la hipersuperficie $t' =$ const es tal que $ds^2 = c^2dt'^2 - dr^2 = -dl^2$. De esta manera $dl^2 = -c^2dt'^2 + dr^2$ con t' el tiempo propio y l la distancia propia medidos ambos a partir del punto P. La coordenada t' corresponde justamente al tiempo cósmico t' y la coordenada l a la coordenada radial ρ que aparece en la ecuación (47.5). Por lo tanto, es claro entonces que el espacio–tiempo que describe al universo vacío no es de Minkowski pues la introducción del tiempo cósmico t' y la distancia propia l son las coordenadas necesarias para describir el comportamiento del mismo. Mediante el uso de estas coordenadas es posible llegar a la métrica de Robertson–Walker equivalente para un universo vacío.

En la época presente, cuando $t = t_0$ y $R = 1$, la ecuación (66.6) implica que

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$\mathfrak{R} = \frac{c}{H_0(\Omega_0 - 1)^{1/2}}. \tag{66.10}$$

Esto significa que la densidad del universo y su curvatura espacial están relacionadas una a una mediante esta relación. Esto no es de extrañarse pues "*la masa le dice al espacio como curvarse...*" (cf. sección §46). De la ecuación (66.10) se sigue entonces que el valor de la curvatura presente del universo puede conocerse sabiendo los valores de su densidad Ω_0 y la constante de Hubble H_0 para la época actual.

Es posible medir la deceleración del universo mediante la introducción de una aceleración adimensional q_0, llamada *parámetro de desaceleración* que se escribe como

$$q_0 := -\left(\frac{\ddot{R}}{\dot{R}^2}\right)\Bigg|_{t_0}. \tag{66.11}$$

Esta definición es clara si se considera que q_0 representa la modificación a la ley de Hubble a segundo orden de aproximación

$$\frac{R(t)}{R(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \dots$$

Sustituyendo la relación (66.6) en la igualdad (66.11) se obtiene el valor de el parámetro de desaceleración para los modelos de polvo

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2}. \tag{66.12}$$

Mediante el uso de las ecuaciones (64.5), (66.2) y (66.5) se sigue que

$$\frac{dz}{dt} = -H_0(1 + z)^2(\Omega_0 z + 1)^{1/2}. \tag{66.13}$$

De aquí que el tiempo cósmico t medido desde la gran explosión $z = \infty$ esté dado por

$$t = \int_0^t dt = -\frac{1}{H_0}\int_\infty^z \frac{dz}{(1 + z)^2(\Omega_0 z + 1)^{1/2}}. \tag{66.14}$$

Utilizando esta relación es fácil ver que (¡demuéstralo!)

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$t_0 = \begin{cases} \frac{\Omega_0}{H_0(\Omega_0-1)^{3/2}}\left\{\arcsin\left(\frac{\Omega_0-1}{\Omega_0}\right)^{1/2} - \frac{(\Omega_0-1)^{1/2}}{\Omega_0}\right\}, & \text{si } \Omega_0 > 1. \\ \frac{2}{3H_0}, & \text{si } \Omega_0 = 1. \\ \frac{\Omega_0}{H_0(1-\Omega_0)^{3/2}}\left\{\frac{(1-\Omega_0)^{1/2}}{\Omega_0} - \operatorname{asinh}\left(\frac{1-\Omega_0}{\Omega_0}\right)^{1/2}\right\}, & \text{si } \Omega_0 < 1. \end{cases} \tag{66.15}$$

De aquí (o de la ecuación (66.14)) se sigue que la edad del universo $t_0 \sim H_0^{-1}$.

Es natural generalizar Ω_0 y H_0 a cantidades que dependan de cualquier tiempo cósmico

$$H(t) := \dot{R}(t)/R(t), \qquad \Omega = 8\pi G\rho/3H^2(t), \tag{66.16}$$

en donde $H(t)$ y $\Omega(t)$ representan a la constante de Hubble y a la densidad del universo evaluadas a un tiempo cósmico t respectivamente.

Así, utilizando las ecuaciones (64.5) y (66.1) se obtiene que

$$\Omega H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0(1+z)^3. \tag{66.17}$$

De esta última relación y utilizando las ecuaciones (66.6) y (66.10) se obtiene una de las relaciones más importantes en cosmología

$$\left\{1 - \frac{1}{\Omega}\right\} = \frac{1}{1+z}\left\{1 - \frac{1}{\Omega_0}\right\}. \tag{66.18}$$

La ecuación (66.18) muestra que, independientemente del valor que Ω_0 tenga en la época presente, en el pasado distante del universo de polvo, cuando $z \to \infty$, el parámetro de densidad $\Omega \to 1$. De hecho, si el parámetro de densidad fuese ligeramente distinto de uno en el pasado distante, este mismo sería notablemente distinto de la unidad en la época presente[†].

El hecho de que la curvatura del universo sea cercana a cero en la época presente se conoce como el *problema de aplanado* del universo. Es importante remarcar este resultado: "El universo debió haber sido puesto en un estado con bastante precisión de tal manera que en el pasado distante $\Omega = 1$. Esto se manifiesta en un universo Euclídeo en nuestra

[†]Las observaciones muestran que el valor del parámetro de densidad del universo en la época presente se encuentra a lo más con un factor de diez de este número, lo cual implica que el universo debe ser cercano a un universo plano

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

época presente".

§67. Modelos de polvo con $\Lambda \neq 0$

Antes de analizar la historia térmica del universo, es importante discutir la dinámica de un universo de polvo cuando la constante cosmológica Λ es tomada en consideración en las ecuaciones de Einstein (46.22):

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik} + \Lambda g_{ik}. \tag{67.1}$$

Históricamente, la constante cosmológica fue introducida por Einstein porque existe la posibilidad de tener soluciones estacionarias del universo si $\Lambda \neq 0$ a este modelo se le conoce como el *modelo estático de Einstein*. El introducir esta constante en las ecuaciones de Einstein ha sido algo que cambia con la época según los avances (o retrocesos) en la cosmología. Las últimas observaciones hechas con supernovas indican que la constante cosmológica es diferente de cero. Además cuando el universo pasa por una época *inflacionaria* (cf. sección §71) necesariamente se obtiene que, en esta época de aceleración exponencial, la constante cosmológica es distinta de cero.

Evidentemente, la existencia de la constante cosmológica puede verse como un tipo de "fuerza antigravitacional[†]" que aparece de alguna manera en las ecuaciones de Einstein. De hecho, estos cambios hechos en las ecuaciones de Einstein tienen un significado físico muy profundo. Esto ya que la introducción de una constante en el Lagrangiano que describe al espacio–tiempo significa que el mismo espacio–tiempo adquiere una curvatura que no puede ser eliminada de ninguna manera y que no está asociada con materia u ondas gravitacionales. De hecho, como veremos en un momento esta misma es atribuida generalmente al *espacio vacío* y las fluctuaciones cuánticas que en el mismo ocurren gracias al principio de incertidumbre de Heisenberg de la mecánica cuántica.

Para comenzar, notemos que las ecuaciones de Friedmann con constante cosmológica Λ no–nula toman la forma

[†]Formalmente no es una fuerza de antigravedad como tal, pues su efecto no es precisamente el efecto inverso de la fuerza gravitacional. Esta fuerza es simplemente una fuerza repulsiva, en vez de una fuerza atractiva como lo es la fuerza gravitacional.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G R\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{1}{3}\Lambda R, \tag{67.2}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{1}{3}\Lambda R^2. \tag{67.3}$$

Incluso cuando $p = 0$ y $\rho = 0$, es decir, en el caso de ausencia de masa y energía en el universo, existe la posibilidad de tener una fuerza neta que actúa sobre cada partícula de prueba en el universo ($\ddot{R} = \Lambda R/3$). Esta propiedad del espacio vacío es de carácter cuántico y no existe forma de entenderle con mecánica clásica.

Se define al vacío cosmológico (o vacío del universo) como la ausencia de campos físicos y por tanto materia y/o energía en una región determinada del universo. En mecánica clásica entonces el vacío tiene una densidad de energía idénticamente igual a cero. Sin embargo, en mecánica cuántica el principio de incertidumbre de Heisenberg implica que deben existir fluctuaciones de campos y energía alrededor del valor nulo esperado que tienen estas cantidades físicas. Por lo tanto, la densidad de energía del vacío es distinta de cero en la realidad. Evidentemente estas fluctuaciones son pequeñas, sin embargo son medibles en el laboratorio (e.g. el efecto Casimir). Cuando se considera el vacío cuántico asociado al Universo en su totalidad, es claro entonces que este efecto puede ser notable en la dinámica del Universo.

La mejor manera de entender un poco como la propiedad del vacío puede producir una constante cosmológica es la siguiente. Consideremos que el vacío posee una una densidad de energía ρ_v y que tiene una presión p_v. Si un pedazo V de vacío es expandido por una cantidad δV mediante un proceso adiabático, entonces mediante la primera ley de la termodinámica, la energía interna por unidad de masa $\delta\epsilon = -p\delta V$. Por otra parte, al expandir el volumen existe un incremento de energía $\delta\epsilon$ del vacío dado por $\delta\epsilon = \rho_v c^2 \delta V$. Esto no sucede generalmente en un gas normal, pues si se tiene gas en un contenedor, al expandirlo, la energía interna del mismo disminuye. Sin embargo, al aumentar el volumen en un contenedor de vacío, la energía aumenta debido a que se incrementa la cantidad de vacío en el mismo. De aquí se sigue que

$$p = -\rho_v c^2. \tag{67.4}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Es decir, el trabajo $p\delta V$ hecho en la expansión es negativo y por lo tanto *la presión es negativa*[†]. Resulta además que durante la expansión la densidad de masa ρ_v del campo de energía negativo permanece constante. El valor no–positivo en la presión puede ser interpretado como una constante cosmológica. Para ver esto, escribamos las ecuaciones de Friedmann (65.5)-(65.4) de la siguiente manera. En la relación (65.5) incluyamos no solamente la densidad de masa ρ_m, sino también la densidad del vacío ρ_v y la presión del vacío p_v (la presión de la materia es cero pues es polvo), para obtener

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G R\left(\rho_m + \rho_v + \frac{3p_v}{c^2}\right). \tag{67.5}$$

Ahora bien, utilizando la ecuación (66.1) en la relación (67.5) se obtiene que

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G\rho_0}{3R^2} + \frac{8}{3}\pi G\rho_v R. \tag{67.6}$$

La ecuación (67.6) es equivalente a la igualdad (67.2) para modelos de polvo si se identifica a la constante cosmológica con el valor

$$\Lambda = 8\pi G\rho_v. \tag{67.7}$$

De aquí se ve que la densidad del vacío es capaz de generar una constante cosmológica, o bien, ¡el vacío genera un tipo de fuerza antigravitacional o fuerza repulsiva! Este resultado fue demostrado por Zeldovich en la década de los 1980's y a la fuerza repulsiva del vacío se le denomina en ocasiones como la *fuerza repulsiva del vacío de Zeldovich*.

Definamos el parámetro de densidad Ω_Λ asociado a la constante cosmológica Λ como (cf. ecuación (66.4))

$$\Omega_\Lambda := \frac{\rho_v}{\rho_0} = \frac{8\pi G\rho_v}{3H_0^2} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \tag{67.8}$$

[†]Termodinámicamente hablando, no hay ningún problema con la existencia de una presión negativa debido a la existencia de estados metaestables de la materia. Las ecuaciones de la mecánica estadística no imponen un valor absoluto en la presión. El ejemplo tradicional para producir una presión negativa en hidrodinámica consiste en mover un un pistón a lo largo de un embase con gas. Si el pistón se mueve suficientemente rápido sobre el gas, entonces se genera un onda de choque que atraviesa el gas incrementando la presión del mismo, así como su temperatura y densidad. Por el contrario si el pistón se mueve lo suficientemente rápido en dirección opuesta al gas, entonces posible generar una presión negativa en el gas del lado opuesto.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Con esto, las ecuaciones de Friedmann (67.2)–(67.3) pueden reescribirse como

$$\ddot{R} = -\frac{\Omega_0 H_0^2}{2}\frac{1}{R^2} + \Omega_\Lambda H_0^2 R, \tag{67.9}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{\Omega_0 H_0^2}{R} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} + \Omega_\Lambda H_0^2 R^2. \tag{67.10}$$

La ecuación (67.10) implica que en la época actual, cuando $R = 1$ y $\dot{R} = H_0$, la curvatura del espacio está relacionada con los parámetros de densidad de masa presente y el del vacío por la siguiente relación

$$\frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} = H_0^2\{(\Omega_0 + \Omega_\Lambda) - 1\}. \tag{67.11}$$

De tal forma que si el espacio es Euclidiano (hoy y por tanto siempre) entonces $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$.

Los modelos con $\Lambda < 0$ y por tanto $\Omega_\Lambda < 0$ no son de mucho interés pues lo único que hacen es añadir una fuerza atractiva al ya existente campo de gravitación. Lo que si es evidente de la ecuación (67.10) es que para este caso la expansión del universo es eventualmente revertida sin importar que tan pequeños sean los valores de Λ y Ω_0.

Los casos interesantes ocurren cuando la constante cosmológica $\Lambda > 0$ y por tanto $\Omega_\Lambda > 0$ pues causa repulsión o un tipo de "*antigravedad*" entre dos partículas de prueba. Para todos estos modelos existe una mínima taza de cambio de expansión que ocurre para el mínimo valor del factor de escala. Este se encuentra diferenciando el valor de $\dot{R}$ en la ecuación (67.10) con respecto del tiempo cósmico, lo cual implica la ecuación (67.9). Igualando está ultima relación a cero se obtiene el valor de R_{min} para el cual $\dot{R}$ es mínimo

$$R_{min} = \left(\frac{\Omega_0}{2\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} = \left(\frac{4\pi G\rho_0}{\Lambda}\right)^{1/3} \tag{67.12}$$

El valor de $\dot{R}^2_{min}$ está dado por

$$\dot{R}^2_{min} = 3H_0^2\left(\frac{\Omega_\Lambda \Omega_0^2}{4}\right)^{1/3} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} = \Lambda^{1/3}\left(\frac{3\Omega_0 H_0^2}{2}\right)^{2/3} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2}. \tag{67.13}$$

Cuando $\dot{R}^2_{min} > 0$ entonces $R(t)$ crece por siempre y $R(t)$ tiende al universo o *modelo de de Sitter* para valores suficientemente grandes:

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

$$R(t) \propto \exp\left\{\Omega_\Lambda^{1/2} H_0 t\right\}, \qquad \text{para } t \to \infty. \tag{67.14}$$

Para el caso en el que el lado derecho de la ecuación (67.13) es negativo, entonces se dice que $R(t)$ (o el universo) es Λ *dominado* y puede comportarse de dos maneras distintas. En la primera el universo es es tal que $R(t)$ decrece hasta alcanzar un mínimo para más tarde incrementarse y crecer indefinidamente hasta alcanzar asintóticamente el valor dado por la ecuación (67.14). En el segundo caso el universo se expande rápidamente a tiempos pequeños, alcanza un máximo y como la fuerza de repulsiva no es suficientemente intensa, un recolapso ocurre.

Los casos más interesantes ocurren para $\dot{R}_{\min} \approx 0$. Justamente el caso en el cual $\dot{R}_{\min} = 0$ es conocido como el modelo de *Eddington–Lemaître*. Para este caso existe la posibilidad de (a) tener un universo que se expande desde el origen en un tiempo finito del pasado y eventualmente alcanzará un estado estacionario, (b) el universo se expande a partir de un estado estacionario en el pasado infinito. En el modelo estático original de Einstein, el estado estacionario ocurre en la época presente. Los modelos de Eddington–Lemaître tienen edades mucho mayores de H_0^{-1} y en el caso del *modelo extremo de Eddington–Lemaître* en el cual $\dot{R}_{\min} = 0$ en el pasado infinito la edad del universo es infinítamente grande.

§68. Historia térmica del universo

Uno de los problemas más importantes para la cosmología astrofísica es sin lugar a dudas el entendimiento del origen y la evolución del contenido del universo mismo. Estos objetos astronómicos debieron ser "cocinados" en etapas tempranas al universo. Para poder analizar estas etapas, es necesario entender la dinámica de universos dominados por radiación y no materia (masa).

Consideremos un gas de fotones para el cual su ecuación de estado está dada por

$$p = e/3. \tag{68.1}$$

Esta relación corresponde a un índice politrópico $\kappa = 4/3$ (cf. ecuación (65.6)). La energía interna por unidad de volumen propio e que contribuye cada fotón a la densidad de

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

radiación está dada por $e = h\nu n$, donde h es la constante de Planck, ν su frecuencia y n el número de partículas (fotones) por unidad de volumen propio. Debido a que $n = n_0 R^{-3} = n_0(1+z)^3$ y como $\nu = \nu_0(1+z)$, de acuerdo con las ecuaciones (63.2) y (64.5) respectivamente, se sigue que

$$e = e_0(1+z)^4 = e_0 R^{-4}. \tag{68.2}$$

Analicemos ahora como varía el espectro de un cuerpo negro. Para comenzar, la ley de Stefan–Boltzman, $e = aT^4$ –cf. ecuación (27.15), implica que[†]

$$T = T_0(1+z) = T_0/R. \tag{68.3}$$

La densidad de energía espectral de un cuerpo negro está dada por la distribución de Planck

$$e(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{d\nu}{\exp(h\nu/kT)-1}, \tag{68.4}$$

$$= \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3}\frac{d\nu_0}{\exp(h\nu_0/kT_0),-1}\left(1+z^4\right)$$

$$= (1+z)^4\, e(\nu_0)d\nu_0. \tag{68.5}$$

De esta manera, el espectro de un cuerpo negro mantiene su misma forma con la expansión del universo.

Tomando la constante cosmológica en las ecuaciones de Friedmann como cero y utilizando la ecuación (68.1) se obtiene que

$$\ddot{R} = \frac{8\pi G e_0}{3c^2}\frac{1}{R^3}, \tag{68.6}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G e_0}{3c^2}\frac{1}{R^2} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2}. \tag{68.7}$$

[†]El hecho de que la temperatura T sea proporcional al factor de escala $R(t)$ es claro si se considera al universo como un gas ideal politrópico de índice $\kappa = 4/3$. Para esto es suficiente notar que $T \propto PV = V^{-\kappa+1} = V^{-1/3} \propto R^{-1}$.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Hoy en día el universo satisface la condición $\mathfrak{R} \gg 1$ y por lo tanto

$$R = \left(\frac{32\pi G e_0}{3c^2}\right)^{1/4} t^{1/2}, \qquad \text{o bien} \quad e = e_0 R^{-4} = \left(\frac{32\pi G e_0}{3c^2}\right) t^{-2} \tag{68.8}$$

La radiación cósmica de fondo en microondas es la mayor contribución a la densidad de energía de la radiación en el espacio intergaláctico. Así, comparando la densidad de masa en radiación con la densidad de masa en materia se obtiene

$$\frac{\rho_{rad}}{\rho_{mat}} = \frac{aT^4}{\Omega_0 \rho_c (1+z)^3 c^2} = \frac{2.6 \times 10^{-5}(1+z)}{\Omega_0 h^2}, \tag{68.9}$$

en donde h es la constante de Hubble medida en unidades de $100\,(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}$, es decir,

$$h := \frac{H_0}{(100\,\mathrm{km/s/Mpc})}. \tag{68.10}$$

De esta manera, la contribución de la materia determina la evolución del universo para corrimientos al rojo $z \leq 4 \times 10^4 \Omega_0 h^2$. Cuando esta condición no se cumple el universo es dominado por la radiación.

Si los fotones en el universo no son creados ni destruidos por la expansión del universo, el *cociente de fotones a bariones*[†]

$$\frac{N_\gamma}{N_B} = \frac{3.6 \times 10^7}{\Omega_0 h^2} \tag{68.11}$$

es un invariante cosmológico. Este cociente es una medida del factor mediante el cual los fotones ganan a los bariones en la época presente y puede mostrarse que es proporcional a la entropía específica del universo por barión en la época de expansión del universo dominada por radiación.

Existen ciertas épocas importantes a lo largo de la historia térmica del universo. Estas pueden listarse de la siguiente manera

★ *Época de recombinación* . ➜ A corrimientos al rojo de $z \approx 1500$ la temperatura de la radiación cósmica de microondas ($T \sim 3(1+z)\,\mathrm{K}$) es $T \approx 4000\,\mathrm{K}$. Justo a esta temperatura hay suficientes fotones con energías $h\nu \geq 13.6\,\mathrm{eV}$ para ionizar todo el hidrógeno neutro

[†]Por bariones se entiende materia que está formada de protones y neutrones. Mas específicamente, materia formada fundamentalmente por tres quarks. Los neutrinos, por ejemplo, no son considerados materia bariónica.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

del medio intergaláctico. A primera vista se ve extraño que temperaturas tan bajas sean capaces de ionizar el hidrógeno neutro pues usualmente se necesitan temperaturas del orden de 150000 K para alcanzar el potencial de ionización del hidrógeno. Cálculos detallados muestran que el gas intergaláctico se encontraba 50 % ionizado a corrimiento al rojo $z \approx 1500$. Esta época se conoce como la *época de recombinación* ya que para tiempos menores, el plasma pregaláctico se encontraba totalmente ionizado y para tiempos mayores este mismo se recombinó. Para épocas $z \sim 6000$ el helio estaba 50 % ionizado y rápidamente se ioniza totalmente para tiempos menores.

✶ *Barrera de fotones.* ➜ Para corrimientos al rojo el universo se convierte opaco a la dispersión de Thomson y por tanto los fotones no pueden propagarse de sus fuentes hacia la tierra a través del plasma ionizado. Por esta razón el universo a corrimientos al rojo mayores a $z \approx 1000$ es inobservable: todos los fotones producidos a estas épocas son dispersados varias veces antes de que puedan propagarse hacia nosotros en la tierra.

✶ *Época de igualdad de densidad de masa inercial radiativa y de materia.* ➜ Cuando el corrimiento al rojo es $z = 4 \times 10^4 \Omega_0 h^2$ entonces la materia y la radiación hacen contribuciones iguales a la densidad de masa (cf. ecuación (68.9)) y para corrimientos al rojo mayores que este valor el universo es *dominado por radiación*.

✶ *Disociación de núcleos.* ➜ Para corrimientos al rojo del orden de $z \approx 3 \times 10^8$, cuando la temperatura de radiación era del orden de $T \approx 10^9$ K los fotones de fondo tenían energía suficiente de rayos–γ (100 eV). A estas altas energías los fotones energéticos en la distribución de Planck son capaces de disociar los núcleos débiles como el del deuterio y helio. Evidentemente, a épocas más tempranas, todos los núcleos atómicos son destruidos.

✶ *Producción de pares electrón–positrón.* ➜ Cuando el corrimiento al rojo $z \approx 10^9$ pueden producirse pares de electrones–positrones. De hecho pueden generarse tantos pares como pares de fotones en el universo presente. Cuando el tiempo cósmico aumenta, estos positrones y electrones se aniquilan dando energía a los fotones de la radiación de fondo. Esto es útil pues de lo contrario la radiación cósmica de fondo presente tendría una temperatura del orden de 1000 veces inferior a los 3 K.

✶ *Nucleosíntesis primordial.* ➜ Una de las razones más fuertes por las cuales la idea de un universo en expansión caliente debe ser tomada seriamente es porque es capaz de predecir la abundancia de los elementos ligeros en el universo mediante el proceso de *nucleosíntesis primordial* que ocurrió a corrimientos al rojo entre $z \sim 10^8$–10^9. La

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

producción de elementos ligeros como el helio–3, helio–4, deuterio y litio–7 no pueden ser construidos en los interiores (hornos) de las estrellas ya que si estos mismos están mezclados en las partes internas de las estrellas, son rápidamente destruidos o convertidos en especies más pesadas. Estos elementos ligeros son producidos en cuestión de minutos, cuando la producción de los demás elementos químicos que conocemos toman millones de años en realizarse dentro del núcleo de las estrellas.

✶ *Barrera de neutrinos.* ➜ Cuando el corrimiento al rojo es ligeramente inferior a los $z \sim 10^9$ se produce una *barrera de neutrinos* de la misma forma que ocurre con los fotones para corrimientos al rojo de $z \approx 1000$.

✶ *Producción de pares barión–antibarión.* ➜ Cuando $z \approx 10^{12}$, la temperatura de fondo es tan alta que se produce un alto número de pares de bariones–antibariones. Un par es producido por cada par de fotones presentes en el universo actual. Estas condiciones llevan a uno de los más fascinantes problemas de la cosmología: *la asimetría de bariones–antibariones* que consiste en los siguiente. El universo en la época presente tiene una obvia discontinuidad entre el número de bariones y antibariones (¡no hay antibariones en nuestro universo presente, lo cual es reconfortante y saludable!). Si esta asimetría no hubiese existido en el universo lejano, entonces el cociente entre fotones y bariones en la época actual sería del orden de 10^9 veces más grande que lo que se observa y habría un número igual de materia y antimateria en el universo actual. Esta asimetría se lleva a cabo por la violación CP (violación Carga–Paridad) en física de partículas.

✶ *Época de Planck.* ➜ Los modelos actuales de gran unificación de partículas han sido experimentalmente comprobados hasta energías del orden de 100 GeV, lo cual implica que probablemente podamos estar bastante seguros del comportamiento del universo hasta tiempos cósmicos $t \sim 10^{-6}$ s. La mayoría de los cosmólogos aceptan la visión del universo hasta tiempos $t \sim 10^{-3}$ s. Sin embargo es posible poner un límite físico a cualquier escala de tiempo, el *tiempo de Planck* $t_P \sim \left(Gh/c^5\right)^{1/2} \sim 10^{-43}$ s. A tiempos más pequeños que éste, estamos totalmente desconectados del universo físico para poder hacer predicciones. De hecho, es posible que las leyes de la física, tal y como las conocemos hoy en día dejen de ser válidas (cf. nota de pie en la página 297).

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

§69. Origen de la estructura a larga escala

Las razones fundamentales por las cuales uno debe tomar en serio el modelo estándard del universo mencionado previamente son (a) la expansión del universo mediante la ley de Hubble, (b) la gran isotropía del universo a larga escala, (c) el espectro de cuerpo negro de la radiación cósmica de fondo en microondas, y (d) la abundancia de los elementos ligeros. De esta manera, la forma más natural de comenzar a trabajar con la estructura del universo es mediante el uso del modelo estándard del universo.

A pesar de que hemos construido un modelo hermoso del funcionamiento del universo, este mismo es un tanto cuanto idealista pues en este universo no hay galaxias, ni estrellas, ni tierra, ¡ni humanos! La mejor manera de elucidar el problema es que el modelo estándard del universo es simplemente una aproximación a primer orden de la realidad. Las galaxias y los sistemas más complejos fueron formados de manera complicada. La manera más simple de explicar el *origen* de la estructura del universo a larga escala se logra cuando el *contraste de densidad* $\delta\rho/\rho$ alcanza una amplitud de 1 a partir de las condiciones iniciales que eran homogéneas e isotrópicas. Cuando el contraste de densidad alcanza el valor unitario, evoluciona de manera no–lineal y rápidamente se forman estructuras amarradas mediante las cuales la formación de estrellas y demás procesos astrofísicos se llevan acabo. El detalle más preciso de como se forma la estructura y que tipo tiene requiere de computo bastante fuerte. En este campo, uno de los grandes líderes de la actualidad es el Mexicano Carlos Frenk quien labora en la Universidad de Durham del Reino Unido.

Las galaxias en el universo debieron haberse formado comparativamente tarde. Esto se ve al analizar los contrastes de densidades promedios de objetos en la época presente. Resulta que este mismo es del orden de $\delta\rho/\rho \sim 10^6$ para galaxias, 1000 para cúmulos de galaxias y unos cuantos para supercúmulos de galaxias. Utilizando la ecuación (66.1) esto significa que las galaxias no pudieron haber sido separadas de objetos gravitacionalmente amarrados antes de corrimientos al rojo de $z \sim 100$. En el caso de cúmulos y supercúmulos el corrimiento al rojo es del orden de 10 y 1 respectivamente.

Para analizar como las pequeñas perturbaciones producidas por la gravedad en un universo en expansión evolucionan consideremos las ecuaciones básicas de la hidrodinámica no–relativista en su formulación Euleriana: la ecuación de continuidad (22.2), la de Euler (23.6) y la de Poisson (25.3). Estas ecuaciones se pueden escribir en términos de

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

coordenadas Lagrangianas (derivadas totales) para obtener

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}, \tag{69.1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi \tag{69.2}$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{69.3}$$

Estas coordenadas Lagrangianas son útiles en el análisis de un universo en expansión porque corresponden precisamente a las coordenadas en comovimiento del universo. La solución a orden cero de las ecuaciones previas ocurre cuando $\boldsymbol{v} = 0$. Si las demás variables son constantes (el universo es isotrópico y homogéneo) entonces se obtiene la solución trivial $p = 0$ y $\rho = 0$. Esto es un problema pues formalmente hablando, no existe una solución estática al problema. Sin embargo, debido a que el universo está en expansión uniforme, las soluciones a orden cero en la perturbación deben corresponder a valores distintos de cero en las las cantidades v_0, ρ_0, p_0, y ϕ_0. En otras palabras, las soluciones a orden cero deben satisfacer el conjunto de ecuaciones (69.1)-(69.3) para estos últimos valores mencionados. Perturbemos ahora las ecuaciones (69.1)–(69.3) a primer orden mediante la introducción de las siguientes cantidades

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{v}, \qquad \rho = \rho_0 + \delta\rho, \qquad p = p_0 + \delta p, \qquad \phi = \phi_0 + \delta\phi. \tag{69.4}$$

Tarea 24

(1) *Muestra que las ecuaciones* (69.1)-(69.3) *al perturbarlas con ayuda de la relación* (69.4) *se transforman en*

$$\frac{d\delta\rho}{dt} + \rho_0\nabla\cdot\delta\boldsymbol{v} = 0,$$

$$\frac{d\delta\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial\delta\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\delta\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla(\delta p) - \nabla(\delta\phi),$$

$$\nabla^2(\delta\phi) = 4\pi G\delta\rho,$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

en donde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} := \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla. \tag{69.5}$$

La ecuación (63.2) *puede escribirse como un "radio–vector" de tal forma que* $\boldsymbol{\rho} = \mathrm{R}(\mathrm{t})\mathbf{r}$, *así* $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}/\mathrm{dt} = \boldsymbol{v} = \dot{\mathrm{R}}\mathbf{r} + \mathrm{R}(\mathrm{t})\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{dt} = \mathrm{H}(\mathrm{t})\boldsymbol{\rho} + \mathrm{R}(\mathrm{t})\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{dt}$. *Cuando* $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{dt} = 0$ *entonces se obtiene la ley de Hubble. De esta manera, el término* $\mathrm{R}(\mathrm{t})\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{dt}$ *puede verse como una pequeña modificación a la ley de Hubble, o bien, una perturbación a primer orden de esta ley. De esta manera, utilizando el hecho de que* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{v}$, *entonces podemos identificar*

$$\delta\boldsymbol{v} = \mathrm{R}(\mathrm{t})\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{dt}}. \tag{69.6}$$

(II) *A partir de esta última relación y las ecuaciones calculadas en el inciso (I) muestra que la densidad* $\delta\rho$ *obedece (¡recuerda que* d/dt *y* ∇ *no conmutan! En tu análisis te será útil demostrar que la suposición* $\rho_0 = const \iff \nabla \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0$, *i.e. el flujo de Hubble es incompresible a cero orden de aproximación.)*

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta\rho}{\mathrm{dt}^2} + 2\frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}\delta\rho}{\mathrm{dt}} = \nabla^2\delta\mathrm{p} + \rho_0\nabla^2\delta\phi. \tag{69.7}$$

(III) *Para flujos adiabáticos (como la expansión del universo) la presión y la densidad a primer orden están relacionados por la velocidad del sonido* c *mediante la siguiente relación:* $\delta\mathrm{p} = \mathrm{c}^2\delta\mathrm{p}$ *(recuerda que* $\mathrm{c}^2 := (\partial\mathrm{p}/\partial\rho)_s$*). Con esto y utilizando la última relación del inciso (i) muestra que*

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta}{\mathrm{dt}^2} + 2\frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{R}^2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_\alpha}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_\alpha}\right)\Delta + 4\pi\mathrm{G}\Delta\rho, \tag{69.8}$$

en donde el contraste de densidad *(o fluctuación de densidad)* Δ *está definido como*

$$\Delta := \frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}. \tag{69.9}$$

(IV) *Busca soluciones para la ecuación* (69.8) *de la forma* $\Delta \propto \exp \mathrm{i}(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega\mathrm{t})$ *y muestra que se obtiene una ecuación de onda*

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta}{\mathrm{dt}^2} + 2\frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{dt}} = \left\{4\pi\mathrm{G}\rho_0 - \mathrm{k}^2\mathrm{c}^2\right\}\Delta, \tag{69.10}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

donde $\mathbf{k}_c$ *es el vector de onda en coordenadas de comovimiento y está relacionado con el vector de onda propio* $\mathbf{k}$ *mediante la relación* $\mathbf{k}_c = R\mathbf{k}$.

La primera solución de la ecuación (69.10) ocurre cuando el medio se expande de manera constante, de tal forma que $\dot{R} = 0$ y así la relación de dispersión para ondas de la forma $\Delta = \Delta_0 \exp i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$ está dada por

$$\omega^2 = c^2k^2 - 4\pi G\rho_0 \tag{69.11}$$

El significado de esta relación es claro. Primeramente, si $\omega^2 > 0$ entonces las soluciones son oscilatorias. Escribiendo $\lambda = 2\pi/k$ se obtiene que las oscilaciones estables son encontradas para casos en los cuales las longitudes de onda son menores a la *longitud de onda de Jeans* λ_J definida por

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c\left(\frac{\pi}{G\rho_0}\right)^{1/2}. \tag{69.12}$$

El caso $\omega^2 < 0$ corresponde a modos inestables cuyas soluciones son

$$\Delta = \Delta_0 \exp(\Gamma t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), \qquad \text{donde} \qquad \Gamma = \pm\sqrt{\left\{4\pi G\rho_0\left(1 - \lambda_J^2/\lambda^2\right)\right\}}. \tag{69.13}$$

Para el caso en el que $\lambda \gg \lambda_J$, la taza de crecimiento $\Gamma = \pm\sqrt{(4\pi G\rho_0)}$, y por lo tanto, el tiempo característico τ para que la inestabilidad ocurra está dado por

$$\tau = 1/\sqrt{(4\pi G\rho_0)} \sim 1/\sqrt{(G\rho_0)}. \tag{69.14}$$

Este análisis corresponde al *criterio de estabilidad de Jeans* que se vio en la sección §24.

Para resolver totalmente la ecuación (69.10) es necesario utilizar las soluciones correspondientes a las ecuaciones de Friedmann. Ya que lo más interesante para nosotros son las inestabilidades para longitudes de onda grandes, consideremos el límite $\lambda \gg \lambda_J$. Así, la ecuación (69.10) puede escribirse como

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{R}}{R}\frac{d\Delta}{dt} = 4\pi G\rho_0\Delta \tag{69.15}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Tarea 25

(I) *Para el caso del universo de Einstein–de Sitter* ($\Omega_0 = 1$), $R(t)$ *está dado por la ecuación* (66.7). *Muestra con esto que la ecuación* (69.15) *puede reescribirse como*

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + \frac{4}{3t}\frac{\dot{R}}{R}\frac{d\Delta}{dt} - \frac{2}{3t^2}\Delta = 0 \tag{69.16}$$

Busca soluciones a esta ecuación de la forma $\Delta \propto t^n$ *y muestra que las soluciones a la ecuación algebraica que se encuentra al sustituir este valor de* Δ *en la ecuación diferencial, ecuación* (69.16), *tiene soluciones* $n = 2/3,\ -1$. *Las soluciones con* $n = -1$ *corresponden a un modo de decaimiento y la solución* $n = 2/3$ *es la solución correspondiente al modo de crecimiento del contraste de densidades. Muestra que para este caso*

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto R = (1+z)^{-1}. \tag{69.17}$$

Esta ecuación es sumamente importante, pues contrario a lo que sucede para el caso $\dot{R} = 0$ *donde el crecimiento del contraste de densidades se lleva a cabo de manera exponencial, este crecimiento ocurre algebraicamente aquí.*

(II) *En el universo de Milne* ($\Omega_0 = 0$), *la ecuación* (66.9) *implica que* $R(t) = H_0 t$. *Muestra que la relación* (66.3) *es en este caso*

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + \frac{2}{t}\frac{d\Delta}{dt} = 0. \tag{69.18}$$

Encuentra soluciones del tipo $\Delta \propto t^n$ *y muestra que* $n = 0,\ -1$ *son soluciones. El modo* $n = 1$ *decae, mientras que el otro modo implica que el contraste de densidades es constante*

$$\Delta = const. \tag{69.19}$$

Este resultado no es de extrañarse pues si no hay materia, no debe haber razón alguna para que las perturbaciones en la densidad se amplifiquen.

Para épocas tempranas del universo, las perturbaciones primordiales se encuentran en la etapa de dominación por radiación. Por tanto es importante analizar el caso del

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

crecimiento de perturbaciones para un gas relativista.

Tarea 26

(I) *Utilizando la relación calculada en la sección* §21

$$\frac{\partial(wu^k)}{\partial x^k} - u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} = 0,$$

muestra que

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\gamma\right\} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\gamma \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \frac{\gamma}{c^2}\frac{dp}{dt}, \tag{69.20}$$

donde γ *es el factor de Lorentz para la velocidad* $\boldsymbol{v}$*. Si consideramos que el movimiento microscópico del gas es relativista (la ecuación de estado corresponde a la de un gas ultrarelativista), pero su movimiento macroscópico es no–relativista* ($\gamma \sim 1 + v^2/2c^2$) *entonces muestra que la ecuación* (69.20) *que representa* la conservación de la energía *toma la forma*

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{4}{3}\rho\left(\nabla \cdot \boldsymbol{v}\right). \tag{69.21}$$

(II) *Cuando el campo gravitacional tiende a su límite Newtoniano, la componente temporal* g_{00} *del tensor métrico está dada por la ecuación* (45.10)*. Muestra utilizando la ecuación* (46.25) *o de alguna otra manera que en este límite, la componente temporal del tensor de Ricci está dada por*

$$R_{00} = \frac{4\pi G}{c^4}\left(e + 3p\right). \tag{69.22}$$

En el caso particular en que se considere polvo, muestra con ayuda de la ecuación de Poisson (25.3) *que ésta última ecuación implica*

$$R_{00} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\phi. \tag{69.23}$$

De hecho, si se toma el límite Newtoniano dado por la ecuación (45.10)*, puede mostrarse (¡cuando tengas tiempo de sobra y quieras hacer álgebra laboriosa por unas cuantas horas no dudes en hacerlo!) que el potencial gravitacional Newtoniano* ϕ

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

está relacionado con R_{00} *mediante la ecuación* (69.23). *Finalmente, utilizando las ecuaciones* (69.22) *y* (69.23) *muestra que la ecuación de Poisson generalizada está dada por*

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\left\{\rho + \frac{3p}{c^2}\right\}. \tag{69.24}$$

Esta ecuación es válida para un gas relativista con movimientos macroscópicos no–relativistas[†] .

La última relación que se necesita para el análisis es la ecuación de Euler (69.2) *pues los movimientos macroscópicos del fluido son no–relativistas.*

(III) *Compara las ecuaciones* (69.21), (69.24) *y* (69.2) *con las ecuaciones* (69.1)-(69.3) *y muestra que la ecuación que describe el crecimiento de la inestabilidad para el contraste de densidades* Δ *definido por la ecuación* (69.9) *está dada por*

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{R}}{R}\frac{d\Delta}{dt} = \frac{32\pi G\rho_0}{3}\Delta \tag{69.26}$$

(IV) *Finalmente, encuentra soluciones de la forma* $\Delta \propto t^n$ *a esta última relación y utiliza el hecho de que el factor de escala está dado por la ecuación* (68.8) *para mostrar que*

$$\Delta \propto R^2 \propto (1+z)^{-2} \tag{69.27}$$

Para finalizar esta sección mencionemos brevemente las consecuencias de los resultados obtenidos. Para corrimientos al rojo tales que $\Omega_0 z > 1$ la dinámica del universo crítico es valida y por lo tanto $R \propto t^{2/3}$. Así, el crecimiento de la inestabilidad está dado por la ecuación (69.17). Para corrimientos al rojo menores a $1/\Omega_0$ esta estabilidad crece mucho más lenta y cuando $\Omega_0 = 0$, la estabilidad permanece constante. Para universos dominados por radiación el crecimiento está dado por la ecuación (69.27).

[†]Cuando hayas tenido ese tiempo de sobra para calcular directamente la ecuación (69.23), te será fácil entonces mostrar que la componente temporal de la ecuación (46.25) está dada por

$$\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T^k{}_k\right), \tag{69.25}$$

de donde se sigue de inmediato la ecuación de Poisson generalizada (69.24). De hecho, la ecuación (69.25) es otra manera mas de escribir la ecuación de Poisson generalizada.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

En la época presente para la cual existen diversas estructuras como las galaxias, el sistema solar, la tierra, sol y humanos es claro entonces que que $\Delta \geq 1$ a $z = 0$. Las observaciones de la radiación cósmica de fondo en microondas muestran que en la última superficie de dispersión, cuando $z \approx 1000$, las amplitudes en las fluctuaciones de la densidad $\Delta = \delta\rho/\rho \geq 10^{-3}$. Ahora bien, para un universo politrópico ($p \propto \rho^{\kappa}$) que se expande adiabáticamente $\delta T = (\partial T/\partial\rho)_s \delta\rho = (\kappa - 1)\delta\rho\, T/\rho$. En otras palabras, cuando $\kappa = 4/3$ se obtiene

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3}\frac{\delta\rho}{\rho} \tag{69.28}$$

De esta manera las fluctuaciones en la temperatura son mayores a una parte en 10^3. Esto está dos ordenes de magnitud por debajo de las fluctuaciones que se observan en la radiación cósmica de fondo en ángulos mayores a 10°. La manera de solventar este problema es asumiendo que el material intergaláctico se encuentra totalmente ionizado para corrimientos al rojo menores a $z \sim 1500$ de tal manera que se obtiene una profundidad óptica suficientemente grande para la dispersión de Thomson, la cual es capaz de amortiguar la amplitud de las fluctuaciones en la temperatura.

§70. Materia oscura

Los cálculos de la masa de las estrellas en un cúmulo utilizando el producto de la luminosidad total visible por el cociente de masa–luminosidad M/L de una galaxia típica implica que la masa estelar de una galaxia $M_\star \sim 10^{13}$–$10^{14}\, M_\odot$. Esto resulta en un conflicto con las estimaciones dinámicas que se obtienen mediante el teorema del virial,

$$M_{\text{din}} \approx \frac{v^2 R}{G}. \tag{70.1}$$

donde v es la velocidad de dispersión de las componentes radiales de velocidad de los miembros galácticos. Resulta que $M_{\text{din}} \sim 10^{14} - 10^{15} M_\odot \sim 10 M_\star$. Esto indica que existe *materia oscura* entre las galaxias de un cúmulo galáctico. Esta materia oscura fue predicha primeramente por Zwicky en la década de los 1930's. En ocasiones se le denomina también la masa perdida, aunque realmente debería llamarse luz perdida.

A primera vista, esto no debería causar ningún problema pues uno puede pensar que

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

existen muchas cosas en el universo que no emiten radiación, es decir, son materia oscura como por ejemplo ladrillos, estas notas impresas en papel, planetas, por mencionar algunas. A este tipo de materia oscura "normal" formada por protones, electrones y neutrones se le denomina materia oscura *bariónica*. Resulta que cuando se hacen las estimaciones de la materia oscura bariónica, esta no ayuda para explicar las anomalías dinámicas antes mencionadas. Es por esta razón que se ha postulado la existencia de materia oscura *no–bariónica* (o simplemente materia oscura como se le denomina mas frecuentemente) para poder resolver este conflicto. A la fecha no se ha detectado este tipo de materia oscura en el laboratorio y debido a su naturaleza, es de esperarse que sea de una interacción muy débil.

La materia oscura también puede ser detectada mediante observaciones en rayos–X y es observada en galaxias de tamaños suficientemente grandes. Para estas últimas galaxias individuales, los resultados indican que las galaxias están rodeadas de halos masivos de materia oscura. Las mejores estimaciones indican que la masa bariónica en un cúmulo de galaxias constituye aproximadamente el 10 % de la masa total asociada al mismo. Por si fuera poco, los modelos de formación galáctica en cosmología requieren que exista materia adicional no–bariónica para poder explicar la pronta formación de estructura en el universo. De hecho, los mejores modelos cosmológicos a la fecha son aquellos con constante cosmológica Λ y que requieren de materia oscura fría (Cosmología Λ–CDM por sus siglas en inglés: "Cold Dark Matter"). Las mas recientes observaciones astronómicas muestran que el contenido energético de esta materia oscura debe constituir $\sim 26\,\%$ de la energía total del universo. Solamente un $\sim 3.5\,\%$ de esta energía total es debida a materia oscura bariónica, encontrada principalmente en enanas cafés que son estrellas muy semejantes al planeta Júpiter. La materia bariónica brillante, i.e. en forma de estrellas, constituye tan solo el $\sim 0.5\,\%$ del total energético. Finalmente, los fotones de la radiación cósmica de fondo constituyen $\sim 0.005\,\%$. El $\sim 70\,\%$ restante se encuentra en forma de energía oscura como describiremos brevemente en la sección §72.

Estas ideas parecen totalmente naturales y perfectamente válidas. Sin embargo, el hecho de no haber detectado directamente la dichosa materia oscura (a pesar de haberse diseñado experimentos muy sofisticados durante los últimos 20 años, ha puesto en tela de juicio su existencia por una minoría de investigadores, que año con año se incrementa, a lo largo del planeta.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

En la década de los 1980's, Milgrom propuso que la razón por la cual las curvas de rotación de las estrellas que giran alrededor de una galaxia son como son (i.e. no tienen perfiles Keplerianos) es debido a que la ley de gravitación de Newton debe ser modificada cuando las aceleraciones que actúan sobre las masas orbitantes (estrellas) son suficientemente grandes. Esta modificación a la ley de Newton, conocida como *teoría de la dinámica modificada* (MOND –Modified Newtonian Dynamics) dicta que para aceleraciones $\mathbf{a}$ que satisfacen $a \ll a_0 = 10^{-8}\,\mathrm{cm/^2s} \approx cH_0$ se debe cumplir que

$$\frac{a^2}{a_0} = -\frac{GM}{r^2}. \tag{70.2}$$

La *constante de Milgrom* a_0 tiene dimensiones son de aceleración. No se sabe mucho con respecto a los fundamentos teóricos que tal predicción tendría. Lo cierto es que es una receta bastante simple de aplicar y ha pasado diversas pruebas experimentales. Aún falta bastante para concluir si la teoría de MOND es cierta. La ecuación (70.2) muestra que el lado izquierdo de la ecuación de gravitación universal de Newton (la dinámica) ha sido modificada. Uno podría arreglar esta ecuación como para que la modificación se tuviera en el lado derecho de la ecuación y por lo tanto tener una modificación de la fuerza de gravitación. Milgrom prefiere decir que es la dinámica la que se modifica, pero no existe ningún argumento empírico o teórico para tal elección. Una de los motivos por los cuales los astrónomos anti–MONDianos han criticado severamente a esta teoría es por su carácter no–relativista. Sin embargo, en el año 2004, Bekenstein propuso una de las teorías mas complicadas (MOND relativista) que ha visto la humanidad para evitar este problema.

A la fecha, la batalla entre materia oscura y MOND parece lejana de concluir. Hay una cantidad muy grande de trabajo realizado alrededor de las ideas de materia oscura, sin embargo, las ideas de modificar la gravitación a escalas cosmológicas tienen cada vez mas seguidores. Una cosa es cierta: la razón la dará únicamente el experimento y no teorías buenas o malas.

§71. Inflación

A pesar de que el modelo de la cosmología caliente es excelente en predecir y dar cuentas de bastantes observaciones, padece gravemente de ciertos problemas básicos. El

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

más obvio de todos se debe al alto grado de isotropía que presenta la radiación cósmica de fondo en escalas menores a 10° en el plano del cielo y con desviaciones de una parte en 10^5 para ángulos mayores. La posibilidad de la uniformidad del universo a larga escala es difícil de explicarse ya que en el modelo estándard cosmológico, el universo se desenvuelve demasiado rápido para permitir que un equilibrio de esta forma se lleve acabo por medio de los procesos comunes mediante los cuales un sistema llega al equilibrio termodinámico. La razón por la que esto no es posible es debido a la transmisión de información. La velocidad de la luz tiene un valor finito y por lo tanto regiones causalmente desconectadas en el universo deberían estar lejos de un equilibrio termodinámico. La distancia máxima recorrida por la luz desde el principio del universo hasta una época se denomina *distancia del horizonte* o simplemente *horizonte*. En el modelo estándard de la cosmología, las señales de la radiación cósmica de fondo en microondas recibidas en la tierra a partir de direcciones opuestas en el cielo se originaron a una distancia de 90 veces la distancia del horizonte cuando fueron emitidas. Estas regiones no estaban en contacto causal. Por lo tanto es difícil ver como es posible que estas dos regiones hayan evolucionado de tal manera que sus propiedades fuesen las mismas. Este problema que presenta el modelo estándard de la cosmología es conocido como el *problema del horizonte*.

Para ilustrar el problema del horizonte mediante un ejemplo consideremos una galaxia separada de nosotros hoy en día por una distancia de 10^9 años luz. Como la edad del universo es $t_0 \sim 1 - 2 \times 10^{10}$ años, entonces cabe la posibilidad de intercambiar $10-20$ señales entre esa galaxia y nosotros. Ahora bien, en la época de recombinación, cuando el factor de escala $R = 10^{-3}R(t_0)$, la separación entre nosotros y esta galaxia fue de 10^6 años luz. Utilizando el hecho de que $R \sim t^{2/3}$, de acuerdo con la ecuación (66.7), entonces la distancia entre nosotros y aquella galaxia distante no se encuentra 10^3 veces más cercana. De hecho se encuentra $10^{9/2}$ más cercana. De esta manera no existe la posibilidad de intercambiar ni siquiera una sola señal entre ambas galaxias.

El siguiente problema que presenta el modelo estándard es el *problema de aplanado del universo*. Es difícil ver como el universo debe poseer un aplanado notable hoy en día y por tanto en sus épocas tempranas con tanta precisión. Definitivamente este valor debió haber sido puesto en las primeras etapas del universo y es una condición que debe ser seleccionada naturalmente con mucho cuidado, de lo contrario Ω_0 sería muy distinta de la unidad hoy en día (cf. ecuación (66.18)).

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Finalmente la homogeneidad del universo a larga escala resulta un problema, pues no existe una uniformidad a escalas cortas en el universo como todos nosotros sabemos. Por ejemplo, un gas normal en equilibrio térmico es bastante inhomogeneo por los movimientos azarosos de las partículas internas al mismo. Estas fluctuaciones en el valor homogéneo de la presión y densidad debieron haberse llevado acabo en las etapas tempranas del universo. A esta peculiaridad del estado inicial de la materia se le conoce como el *problema de suavizado* en el modelo estándard de la cosmología.

Para poder explicar los fenómenos que ocurren en el modelo estándard de la cosmología es necesario mezclar ingredientes de cosmología, astrofísica y física nuclear. Sin embargo, en etapas muy tempranas del universo es necesario utilizar otras ramas de la física. En estas épocas del universo la temperatura es tan grande que toda la materia es descompuesta en sus componentes fundamentales en forma de partículas elementales. Evidentemente estas etapas del universo requieren del uso de las teorías de partículas elementales. De todos los modelos de partículas elementales, el más fundamental de todos es *la teoría de la gran unificación* . Esta teoría consiste en que las cuatro fuerzas de la naturaleza: la gravitación, la electromagnética, la débil y la fuerte forman parte de una misma y única *gran fuerza unificada*. Esencialmente, en esta teoría, una simetría pone una relación entre dos fuerzas. Las cuatro fuerzas de la naturaleza en el universo presente son bastante diferentes y por tanto la teoría cósmica en etapas tempranas es construida de tal forma que la simétrica es rota espontáneamente en el universo actual[†].

La teoría de gran unificación muestra que el número de bariones no se conserva. Esto quiere decir básicamente que el protón tiene una vida media la cual resulta ser bastante grande: $\sim 10^{30}$ años para temperaturas bajas. Sin embargo para temperaturas altas, los cambios en el número de bariones se presentan de manera más común.

Naturalmente, al combinar el modelo estándard de la cosmología con las teorías de gran unificación es posible entender la asimetría de bariones–antibariones que existe en el

[†]Un rompimiento espontáneo de simetría es aquel mediante el cual el estado de equilibrio de un sistema se encuentra escondido. Por ejemplo, un líquido descrito por leyes físicas que son simétricas rotacionalmente, es simétrico rotacionalmente en si mismo. En otras palabras, la distribución de sus moléculas se ve igual sin importar el ángulo al cual se observa el líquido. Cuando el líquido se enfría los átomos se arreglan a manera de cristales a lo largo de sus ejes cristalográficos y la simetría rotacional se rompe. De esta manera cuando la temperatura de un sistema con simetría rota se incrementa puede llevarse a un estado (semejante a una transición de fase) mediante el cual la simetría es preestablecida.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

universo. El exceso de materia sobre antimateria se lleva acabo a temperaturas menores a la temperatura crítica de rompimiento de simetría.

El problema del horizonte se debe al hecho de que la gravedad produce una desaceleración en la expansión cósmica, es decir, $R(t) \propto t^n$ con $n < 1$. La manera de evadir este problema es proponiendo una solución mediante la cual el universo se expanda de manera exponencial acelerada a tiempos menores a los de la fase de crecimiento t^n. De esta manera en un universo acelerado existe la posibilidad de tener regiones del universo causalmente conectadas en el pasado de tal manera que pudiesen haber estado coordinadas antes de la época inflacionaria.

La manera en la que el modelo inflacionario funciona es prediciendo una época de crecimiento exponencial $R(t) \propto e^t$ (cf. sección §67). Esta situación debió haber ocurrido en etapas posteriores a la cual, la energía del universo $kT \sim 10^{15}$ GeV, más o menos cuando el tiempo cósmico era menor a $\sim 10^{-36}$ s, cuando el universo tenía unos cuantos centímetros de tamaño.

De cualquier forma, es importante notar que el universo debió haber emergido de una región causalmente conectada no más grande que la escala de Planck[†]. De esta manera,

[†] George Johnstone Stoney en la década de los 1870's fue la primer persona en darse cuenta que utilizando ciertas constantes fundamentales de la física era posible construir una longitud, una masa y un tiempo característico. En efecto, utilizando la carga del electrón e, la constante de gravitación de Newton G y la velocidad de la luz c él construyó una masa $m_J = (e^2/G)^{1/2} \sim 10^{-10}$ kg, una longitud $l_J = (Ge^2/c^4)^{1/2} \sim 10^{-37}$ m y un tiempo $t_J = (Ge^2/c^6)^{1/2} \sim 10^{-46}$ s. De manera independiente, Max Planck utilizó para construir estas dimensiones fundamentales a la constante de Planck $\hbar$, la constante de gravitación universal de Newton y la velocidad de la luz. Con estas cantidades, es fácil encontrar una combinación de las mismas con dimensiones de tiempo, denominada el *tiempo de Planck* t_P, cuyo valor es

$$t_P = \left(\frac{Gh}{c^5}\right)^{1/2} \sim 10^{-43}\,\text{s} \tag{71.1}$$

Con esto, la *longitud de Planck* l_P queda determinada por

$$l_P = ct_P = \left(\frac{Gh}{c^3}\right)^{1/2} \sim 10^{-35}\,\text{m}. \tag{71.2}$$

Finalmente la *masa de Planck* m_P está dada por

$$m_P = \left(\frac{hc}{G}\right)^{1/2} \sim 10^{-8}\text{kg}\,. \tag{71.3}$$

La razón fundamental por la cual el análisis de Planck tiene sentido físico es la siguiente. Imaginemos que deseamos hacer un sondeo de una región del espacio cuyo tamaño característico está dado por x. Para poder describir este pedazo de espacio es necesario que se utilice una "partícula de prueba" cuya

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

como $t_0 \sim 10^{10}$ años $\sim 10^{17}$ s, entonces $t_0 \approx 10^{60} t_{\text{Planck}}$. Por lo tanto, lo único que hay que hacer es que el universo crezca más allá de los 10^{60} veces que se ha incrementado desde la época de Planck. Claramente esto es posible mediante un crecimiento exponencial.

En los modelos de gran unificación de la física, al cuantizar los campos y utilizar el principio de incertidumbre existe la posibilidad de tener fluctuaciones incluso cuando el valor del campo sea nulo. Esto significa que el vacío como tal posee una energía $\rho_v c^2$ y una presión distinta de cero p_v. Como vimos en la sección §67 al expandir un pedazo de volumen de vacío, su energía se incrementa por un factor $\rho_v c^2 \delta V$. Es decir, el trabajo $p_v \delta V = -\rho_v c^2 \delta V$, por lo que la presión del vacío tiene un valor negativo: $p_v = -\rho_v c^2$. Esto corresponde a un valor de la constante cosmológica dado por la ecuación (67.7). La solución a la ecuación de Friedmann para este caso está dada por la ecuación (67.14) para tiempos suficientemente grandes. De esta manera es posible entonar la solución de tal manera que se pueda tener contacto causal entre distintas regiones. La expansión exponencial resuelve el problema de aplanado de manera obvia. Si inicialmente el radio de curvatura tenía un valor distinto de infinito, el rápido crecimiento del universo se encarga de aplanarlo y suavizarlo de tal manera que la curvatura del universo sea nula.

El gran problema que presenta la inflación es el hecho de que el universo sea capaz de super–enfriarse de tal manera que la densidad de masa (en materia oscura y visible) sea la dominante en el universo actual. De hecho, la fase de crecimiento exponencial debe terminar abruptamente para que exista un recalentamiento del universo a temperaturas suficientes para sintetizar bariones.

Actualmente varias teorías favorecen a la inflación caótica. En este modelo no hay una singularidad inicial del universo simple. Por el contrario, el universo puede extenderse

dimensión característica (digamos su diámetro) λ sea menor o de perdida igual al tamaño x (evidentemente entre menor sea el tamaño de la partícula de prueba, mejor se hará el sondeo de esta región del espacio). Imaginemos ahora que la región del espacio que se quiere describir es excesivamente pequeña. Tanto, que su descripción requiere de un análisis cuántico. La longitud característica λ de la partícula de prueba con masa m está aproximadamente determinada por su *longitud de onda de de Broglie* con velocidad igual a la de la luz (i.e. mas o menos la *longitud de onda de Compton*) dada por $\lambda := \hbar/mc$. Ahora bien, la partícula de prueba puede ser tan pequeña como queramos, siempre y cuando su longitud sea mayor al radio de Schwarzschild $r_S \approx GM/c^2$, es decir: $\lambda \geq r_S$. Cuando la desigualdad anterior se invierte la partícula de prueba se convierte en un agujero negro y no hay manera de sondear un espacio con dimensiones tan o mas pequeñas que esta. La desigualdad anterior implica que $m \leq m_P$, $t \geq t_P$ y que $l \geq l_P$. Por lo tanto, ¡las dimensiones y los tiempos cuyos valores son menores a los de Planck no son posibles de medir! Las partículas de prueba utilizadas para sondear estas regiones del espacio–tiempo ¡se convierten naturalmente en agujeros negros!

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

muchísimo más allá de los $10-20$ mil millones de años que presenta el radio de Hubble. Poco a poco, nuevas galaxias y objetos aparecerán dentro del radio de Hubble a medida que el reloj que mide el tiempo cósmico avanza. De hecho, lo que ahora llamamos nuestro universo puede bien ser parte de un ensamble más grande de un ciclo reproductivo eterno de distintos universos. Cada uno de estos universos no se encuentran causalmente conectados en la época presente, sin embargo provienen de un ancestro común. En cada uno de estos universos la forma en la que se llevaron acabo los rompimientos espontáneos de simetría pudo haberse llevado de distinta manera y solamente en alguno de ellos (como el nuestro) la física se manifiesta como la percibimos. Esta idea de tener múltiples universos se le conoce como *teoría de multiuniversos*. La perfecta entonación de las fuerzas físicas, así como la de las constantes fundamentales de la física (e.g. carga del electrón) es entonces capaz de dar origen a la vida como la percibimos en el sistema solar. Estos argumentos dan lugar al famoso *principio antrópico* primeramente formulado por Dicke en la década de los 1960s. Este principio dicta que las leyes de la física, así como de las constantes fundamentales de la naturaleza son justamente como deben de ser, es decir, están hechas con tal precisión que un movimiento mínimo de las mismas impedirían la existencia de varios objetos físicos en el universo, como la vida humana por poner un ejemplo. Esto es todo un tema con implicaciones físicas y filosóficas ciertamente severas, pero en los últimos años ha renacido con aun más fuerza este principio gracias a las observaciones hechas con supernovas en galaxias distantes como veremos a continuación.

§72. Energía oscura

La tecnología actual permite observar eventos de supernovas que ocurren en distintas galaxias. Las supernovas de tipo Ia funcionan como velas estándares en el sentido de que su luminosidad es la misma independientemente del fenómeno observado. En otras palabras, el espectro siempre tendrá la misma forma al ser observado en la tierra. En la tierra observamos el flujo de esta emisión, y como se conoce su luminosidad es posible calcular la distancia a la que ocurre el evento. En otras palabras, el observar supernovas de este tipo en diversas galaxias permite realizar mediciones de tal forma que diversos parámetros fundamentales del universo como Ω_0, Ω_Λ, H_0, q_0, etc. pueden ser calculados.

Resulta que de todas las observaciones actuales (rayos-X, óptico y radio), el contenido

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

energético de la materia visible más la el asociado a la materia oscura más la de energía en radiación observada en la radiación cósmica de fondo representan únicamente una tercera parte de la energía total en el universo (cf. sección §70). Además, al medir con precisión el receso de las galaxias resulta que estas se están acelerando con mucho mayor fuerza que la que cualquier modelo cosmológico indicaría. Esto significa que existe una nueva fuente de energía, la *energía oscura* que está asociada naturalmente a cada milímetro cúbico en todo el espacio y que representa los dos tercios faltantes de la energía total en el universo. El carácter de esta fuente es repulsivo. A primera vista, todo parecería que es el vacío el que de alguna manera está involucrado. El problema con utilizar al vacío como energía oscura es que su fuerza sería excesivamente grande y se manifestaría enormemente en la aceleración de las galaxias. Por si fuera poco, las teorías de unificación combinadas con la teoría de supersimetría dan una cancelación exacta al vacío. Si la cancelación fuese imperfecta debería ser casi nula (con una precisión de 120 lugares decimales) y por tanto éste tan perfecto entonamiento del universo no parece factible.

En la época presente, la materia y la energía oscura poseen densidades de energía comparables. Por esta razón, en el pasado del universo, la constante cosmológica debió haber tenido el mismo valor que el de hoy en día. De tal forma que cuando el universo era 100 ordenes de magnitud más denso que el universo actual (10^9 años) por cada 10^{100} partes de materia, los procesos físicos crearon una y sola una parte de energía del vacío. Esto es difícil de creer.

Los griegos describieron al universo compuesto por cuatro elementos: tierra, aire, agua y fuego. Denominaron a una sustancia especial que detenía a la tierra, luna y planetas para no caer hacia la esfera celeste. Esta quinta sustancia, o *quintaesencia* es la que ha dado nombre a la teoría actual correspondiente a la energía oscura en el universo. Realmente existen más teorías, pero ésta parece ser la de mas aceptación al presente.

En la teoría de la quintaesencia existe una aceleración producida en tiempos recientes del universo. La presión de la quintaesencia es menos negativa que la del vacío y varía con el tiempo. De esta manera, se produce una aceleración moderada de las galaxias en la época actual. La ecuación de estado de la quintaesencia es

$$p_x = \omega c^2 \rho_x. \tag{72.1}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

A diferencia de los modelos de vacío con $\omega = -1$, la ecuación de estado para la quintaesencia puede variar siendo positiva, negativa o cero. La tercera ecuación de Friedmann muestra naturalmente que para tener repulsión se debe cumplir que $\omega \leq 1/3$. Hoy en día estamos en una época en la cuál observamos $\omega \sim -1$. El punto clave es identificar a la quintaesencia con un campo cuántico a priori desconocido. Por si fuera poco, al igual que con la constante cosmológica, es difícil pensar la forma en la que el universo debió haber sido creado con tanta precisión como para tener la aceleración observada hoy en día. De esta manera, existe la posibilidad de pensar en un principio antrópico. La manera de salir del principio antrópico es modelar al campo como un atractor global de tal forma que, independientemente de las condiciones iniciales, se llegue al mismo resultado a medida que avanza el tiempo. No obstante, es difícil imaginar en que época y por qué justo en la nuestra es cuando la quintaesencia tiene un papel fundamental en la dinámica del universo. Hasta el momento todo parece indicar que existe un momento clave en el cual la quintaesencia podría haber comenzado a dominar: la superficie de la última dispersión de la luz. Es evidente que cualquiera que sea el causante de la energía oscura, este fenómeno físico determinará el futuro y destino del universo.

Nuevamente, las ideas de energía oscura y quintaesencia son bastante populares hoy en día. Sin embargo existen alrededor de cinco teorías alternativas a las ideas mencionadas anteriormente. Para no entrar en detalle innecesario solamente mencionaré que quizás el rival mas fuerte de la energía oscura es una modificación de la teoría general de la gravitación de Einstein. Estas teorías métricas de la gravitación hacen que la acción de masa y energía en el universo a gran escala produzcan de manera muy natural una repulsión entre las galaxias. La razón final la tendrá solamente el experimento y no queda mas que observar el desarrollo de todas estas teorías y sus consecuencias observacionales.

§73. El destino del universo

A pesar de que la física que prevalece en los primeros instantes desde la creación del universo ($t \lesssim 10^{-3}$ s) es bastante alentadora, es difícil tener bases experimentales para la misma, indirectas y sobre todo directas, que puedan dar solidez a la misma. De esta manera, existe un rango de tiempos que se extiende 40 ordenes de magnitud, desde el tiempo de Planck 10^{-43} s hasta $t \sim 10^{-3}$ s, donde no podemos estar seguros de nuestro entendimiento

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

de la microfísica que debió haber dominado al universo. La escala de tiempo sobre la cuál podemos estar seguros de nuestro entendimiento del universo se extiende 12 ordenes de magnitud, desde $t \sim 10^{-3}$ s hasta $t_0 \sim 10^9$ s. Este último intervalo de tiempo está dividido en dos partes. El intervalo en el cual 10^{-3} s $< t < 10^3$ s y el intervalo de tiempo tardío donde $t > 10^3$ s. El primer intervalo de tiempo requiere del conocimiento de física básica bastante incierta y especulativa. Es en esta escala de tiempo donde el aplanado del universo, el número de bariones comparado con número de fotones, las fluctuaciones primordiales de la radiación cósmica de fondo, la materia oscura exótica y la energía oscura son creados. La segunda etapa constituye el *modelo caliente* del universo y es donde se producen los elementos ligeros y donde la radiación de cuerpo negro del gas primordial del universo deja de ser opaca. Este segundo intervalo de tiempo es de cierta manera, fácil de calcular puesto que existe homogeneidad y aplanado del universo. La última etapa se da después de la recombinación de los elementos. De aquí se sigue la creación de las galaxias, los cúmulos de galaxias y los supercúmulos de galaxias. Esta última región es principalmente el trabajo de los astrónomos y es complicada pues representa la manifestación de toda la física existente.

Sea cual sea el inicio del universo, es también importante saber cual será su final. Básicamente esto depende de la curvatura del mismo y del comportamiento de la energía oscura y la energía del vacío. Hoy en día todo parece indicar que el universo se expandirá por siempre. De cualquier manera, analicemos rápidamente los destinos del universo sin tomar en cuenta la energía oscura actual y tomando en cuenta que la energía del vacío es despreciable en la época presente.

✲ *Universo en recolapso (cerrado).* ➜ Si el tiempo $t = 0$ corresponde al tiempo del recolapso (lo opuesto de la gran explosión), entonces existen diversas épocas importantes a destacar para el universo

- ⋆ $t \sim -10^9$ años . ➜ Cúmulos de galaxias se amalgaman
- ⋆ $t \sim -10^8$ años . ➜ Las galaxias se amalgaman entre sí.
- ⋆ $t \sim -10^6$ años . ➜ Las estrellas se mueven a velocidades relativistas.
- ⋆ $t \sim -10^5$ años . ➜ La temperatura del cielo es más caliente que la temperatura de la superficie estelar.
- ⋆ $t \sim -10^3$ años . ➜ Las estrellas son destruidas y los agujeros negros crecen de manera

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

catastrófica.

⋆ $t \sim -1$ año . ➜ La temperatura es mayor a 10^8 K en todas partes.

✯ *Universo en expansión por siempre (abierto).* ➜ Cuando el espacio es capaz de expandirse por siempre existe la posibilidad de sobrevivir por un poco más de tiempo, pero no por siempre:

⋆ $t \sim 10^{14}$ años . ➜ Actividad estelar finalizada. Esencialmente, la muerte de las estrellas.

⋆ $t \sim 10^{17}$ años . ➜ Relajación dinámica significante en las galaxias.

⋆ $t \sim 10^{20}$ años . ➜ Efectos de radiación gravitacional en galaxias significante.

⋆ $t \sim 10^{31} - 10^{36}$ años . ➜ Decaimiento del protón.

⋆ $t \sim 10^{64}$ años . ➜ Evaporación cuántica de agujeros negros.

⋆ $t \sim 10^{1600}$ años . ➜ Las enanas blancas se transforman en hierro si el decaimiento del protón no se lleva acabo conforme a las predicciones teóricas.

⋆ $t \sim 10^{10^{26}} - 10^{10^{76}}$ años . ➜ Si el protón no decae, entonces las estrellas de neutrones pasan por una etapa de tunelaje cuántico para transformarse en agujeros negros, los cuales se evaporan rápidamente.

Llevamos un buen camino recorrido con respecto al entendimiento del universo y las leyes físicas que lo rigen. Sin embargo, es necesario recorrer aun más y ahí es donde entras tu...

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Apéndice.

GNU Free Documentation License

Version 1.1, March 2000

Copyright © 2000 Free Software Foundation, Inc.
59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA
Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other written document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

§74. Applicability and Definitions

This License applies to any manual or other work that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you".

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (For example, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, whose contents can be viewed and edited directly and straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup has been designed to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly

available DTD, and standard-conforming simple HTML designed for human modification. Opaque formats include PostScript, PDF, proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

§75. Verbatim Copying

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

§76. Copying in Quantity

If you publish printed copies of the Document numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a publicly-accessible computer-network location containing a complete Transparent copy of the Document, free of added material, which the general network-using public has access to download anonymously at no charge using public-standard network protocols. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

§77. Modifications

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

- List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has less than five).
- State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- Preserve all the copyright notices of the Document.
- Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- Include an unaltered copy of this License.
- Preserve the section entitled "History", and its title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

- In any section entitled "Acknowledgements" or "Dedications", preserve the section's title, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

- Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

- Delete any section entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

- Do not retitle any existing section as "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties – for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

§78. Combining Documents

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections entitled "History" in the various original documents, forming one section entitled "History"; likewise combine any sections entitled "Acknowledgements", and any sections entitled "Dedications". You must delete all sections entitled "Endorsements."

§79. Collections of Documents

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

§80. Aggregation With Independent Works

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, does not as a

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

whole count as a Modified Version of the Document, provided no compilation copyright is claimed for the compilation. Such a compilation is called an "aggregate", and this License does not apply to the other self-contained works thus compiled with the Document, on account of their being thus compiled, if they are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one quarter of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that surround only the Document within the aggregate. Otherwise they must appear on covers around the whole aggregate.

§81. Translation

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License provided that you also include the original English version of this License. In case of a disagreement between the translation and the original English version of this License, the original English version will prevail.

§82. Termination

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

§83. Future Revisions of This License

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to

the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have no Invariant Sections, write "with no Invariant Sections" instead of saying which ones are invariant. If you have no Front-Cover Texts, write "no Front-Cover Texts" instead of "Front-Cover Texts being LIST"; likewise for Back-Cover Texts.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

Índice de autores

Aristarcus de Samos, 19

Bessel, Friedrich, 20
Braginsky, V., 178
Brahe, Tycho, 20

Chandrasekhar, Subrahmayan, 25
Copérnico, Nicolás, 20
Curtis, Herber, 246

Dicke, Robert H., 177
Doroshkevish, Andrei, 26

Eötvos, Barón de, 177
Einstein, Albert, 24
Eratóstenes, 19

Friedman, Alexander, 25

Halley, Edmund, 20
Hawking, Stephen, 25
Herschel, William, 21
Hicetas de Siracuse, 19
Hiparcus, 20
Hubble, Edwin, 25, 27

Kirkchhoff, Gustav, 21

Landau, Lev Davidovich, 25
Lucas, George, 70

Misner, Charles, 26
Mitchell, John, 223

Newton, Isaac, 20, 24, 45
Novikov, Igor, 26

Panov, V., 178
Penrose, Roger, 25
Ptolomeo, Claudius, 20

Rees, Martin, 25, 54
Rodriguez, Luis Felipe, 54

Sciama, Dennis, 25
Sedov, L.I., 145
Silk, Joseph, 25

Thorne, Kip, 26

Wheeler, John, 26

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

Índice alfabético

año luz, 26
aberración de la luz, 70
acreción, 142, **158**
    de Bondi, 160
    de disco, 160
    de línea, 160
    disco de, 163
      relativista, 250
    disco delgado de, 165
    disco–α de, 169
    esférica, *véase* acreción de Bondi
    factor de eficiencia, 160
    taza de, 158, 159, 169
agujeros negros, **221**, 223
    leyes de escala, 252
    primordiales, 246
    supermasivo, 248
Alderan, 118
antigravitación, *véase* fuerza repulsiva del vacío de Zeldovich
aplanado del universo, *véase* problema de aplanado del universo
astrofísica, 21
    relativista, 23
astronomía
    mesoamericana, 21

barión, 282
barrera de neutrinos, *véase* época de barrera de neutrinos
Bianchi
    identidad de, *véase* identidad de Bianchi
Big Bang, *véase* gran explosión
binarias
    de rayos–X, 158
blazares, *véase* galaxias, blazares

cadena p–p, *véase* cadena protón–protón
cadena protón–protón, 129
calendario
    Maya, 21
campo
    eléctrico, 85
    magnético, 86
causalidad, 61
chorros, *véase* jets
Christoffel

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

símbolos de, *véase* símbolos de Christoffel
ciclo CNO, 130
cinturón de asteroides, 26
COBE, *véase* COsmic Background Explorer
coeficiente
de conductividad térmica, 132
de radiación térmica, 132
de viscosidad, *véase* viscosidad dinámica
colapso gravitacional, 45, 115
compacto
objeto, 223
condición
de Lorentz, 94
conexión, *véase* símbolos de Christoffel
cono de luz, 62
constante
cosmológica, 25, **276**
de densidad de radiación, 131
de Hubble, 268
de Milgrom, 294
de Stephan–Boltzman, 131
contracción
de Lorentz, 69
de un tensor, *véase* tensor: contracción de un
coordenada
de la medida de la distancia, 216
radial de comovimiento, 265
coordenadas
de Boyer–Lindquist, 240
galácticas, 30
corrimiento al rojo, 262, 268
gravitacional, **182**, 232
COsmic Background Explorer, 36, 261
cosmología, **259**
Newtoniana, 108
observacional, 267
criterio
de estabilidad de Jeans, *véase* Jeans, criterio de estabilidad
cuasares, *véase* galaxias: cuasares
cuatro–aceleración, *véase* cuatro–vector de aceleración
cuatro–vector, 71
como–espacio, 72
como–tiempo, 72
componente espacial, 72
componente temporal, 72
contravariante, 71, 187
covariante, 71, 187
de aceleración, 79
de corriente–carga, 92
de energía–momento, *véase* cuatro–vector de momento
de flujo de partículas, 103
de fuerza, 82
de momento, 82
de onda, 95
de velocidad, 79
nulo, 72
potencial electromagnético, 84

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

cuatro–velocidad, *véase* cuatro–vector de velocidad
curvatura
escalar, *véase* curvatura Gaussiana
escalar del espacio, *véase* escalar de Ricci
Gaussiana, 217
cygnus A, 247

delta de Kronecker, *véase* tensor unitario de rango 2
densidad
contraste de, 285, 287
crítica, 272
derivada
contravariante, 199
covariante, 198
descarga, 256
destellos de rayos–γ, 34
diagrama
de Minkowski, *véase* diagrama espacio–tiempo
espacio–tiempo, 55
diferenciación
en espacios curvos, 195
diferencial, 75, 187
disco–α, *véase* acreción,disco–α de
distancia
diametral angular, 217, 269
medida de la, 269

ecuación
de Euler, 105
de Bernoulli, 106
de conservación de energía relativista, 290
de continuidad, 104
de estructura estelar
cuarta, 132
primera, 120
segunda, 120
tercera, 130
de Lane–Emden, 121
de Lorentz, 85
en cuatro dimensiones, 88
de movimiento
en campo electromagnético, **84**
de onda
para campo electromagnético, 94
de Poisson
para el campo gravitacional generalizada, 291
para el campo gravitacional, 117
de Raychaudhuri, 270
de transporte energético, 132
geodésica, 205
ecuaciones
de Einstein, **207**, 213
de estructura estelar, 119
de Friedmann, **269**, 270
de la hidrodinámica, **102**
de Maxwell, **89**, 94
del campo electromagnético, *véase* ecuaciones de Maxwell

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

del campo gravitacional, *véase* ecuaciones de Einstein
Eddington
límite de, **153**
efecto
Casimir, 277
Doppler, 29, 36, 39, **94**, 96, 155
Mössbauer, 236
eficiencia
factor de, *véase* acreción, factor de eficiencia
Einstein
anillos de, *véase* lentes gravitacionales
elevador de, 182
electromagnetismo, **83**
enanas blancas, 25, **136**
enanas cafés, 293
enanas nova, *véase* nova,enanas
energía
interna
densidad de, 102
de amarre gravitacional, **116**
mínima, en radio jets, 254
oscura, 239, **299**
entalpía
densidad de, 102
época
de barrera de fotones, 283
de barrera de neutrinos, 284
de disociación de núcleos, 283
de igualdad de densidad de masa inercial radiativa y de materia, 283
de nucleosíntesis primordial, 283
de Planck, 284
de producción de pares barión–antibarión, 284
de producción de pares electrón–positrón, 283
de recombinación, 282
equilibrio
hidrostático, 114
escalar
de Ricci, 212
espacio
curvo, 181
de Minkowski como un espacio euclidiano de 4D, 66
de Minkowski pseudo–euclidiano, 67
galileano, *véase* espacio plano
plano, 181
espacio–tiempo, 59
espacios
curvos, **179**
espectro electromagnético, 17
estrellas, **113**
cefeidas, 40
de neutrones, 25, 139
supermasivas, 250
estructura a larga escala del universo
origen de, **285**
evento, 53, 70
expansión
superlumínica, *véase* movimiento superlumínico

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

explosión Sedov–Taylor, *véase* supernova, expansión Sedov–Taylor

factor
de escala, 265
de Lorentz, 67
fluctuación
de densidad, *véase* densidad, contraste de
fluido
con presión nula, *véase* polvo
flujo
adiabático, 105
de energía electromagnética, 40
de Hubble, 264
estacionario, 106
isentrópico, 105
frecuencia
electromagnética, 95
fuerza
de Lorentz, *véase* ecuación de Lorentz
eléctrica, 85
magnética, 86
repulsiva del vacío de Zeldovich, 278

galaxia, 27, 259
vía láctea, 27, 35
galaxias
activas, 27
blazares, 27
cúmulos, 27
cuasares, 27, 55, 248
guerra de las, 70, 118
núcleos activos, 27
Seyfert, 249
geodésica, 204
geometrodinámica, 206
gigante roja, 134
gradiente, 75, 187
gran explosión, 264
gravitación
relativista, *véase* teoría especial de la relatividad

hidrodinámica relativista, **97**
hierofanía, 23
hipótesis
de Weyl, 264
Hipparcos, satélite, 39
historia térmica del universo, **280**
horizonte, 272, 295
de eventos, 244

identidad
de Bianchi, 211
inclinación
de una órbita, 154
inflación, **294**
integral
en espacio de cuatro dimensiones curvo, 191–192
en espacio de cuatro dimensiones de Minkowski, 76–77
intervalo, **57**, 58, 188
causal, 61
como–espacio, 61

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

como–tiempo, 61

Jeans
criterio de estabilidad, **113**, 115, 288
criterio de inestabilidad, 116
longitud de, 115
masa de, 116
jets, 54, 248
extragalácticos, 253
radio fuertes, 254

línea de universo, 56, 58
líneas de corriente, 106
Laval
cohete convergente–divergente de, 256
lentes gravitacionales, **236**
ley
de Boltzman, 131
de Hubble, **262**
de Kepler, 155
leyes
de escala en agujeros negros, *véase* agujeros negros, leyes de escala
de la termodinámica
para agujeros negros, **244**
primera, 104
segunda, 244
longitud
de onda
de Compton, 298
de de Broglie, 298
elemento de, en espacios curvos, 193
propia, 68

luminosidad, **40**
de Eddington, 154, 253

métrica
de Kerr, 240
de Robertson–Walker, 263, 266
de Schwarzschild, 221
del espacio–tiempo, 180
para agujeros negros en rotación, *véase* métrica de Kerr
signo de, 58
magnitud
absoluta, 42
aparente, 42
maquinaria central, 248
masa
activa, 176
cociente masa–luminosidad, 44
de Chandrasekhar, 137
factor de, 155
gravitacional, 176
inercial, 176
medición astronómica de, 42
pasiva, 176
reducida, 43
materia
oscura, 44, 239, **292**
mecánica relativista, 79
medida de la distancia, *véase* distancia, medida de la
megatón, 118
micro–cuasares, 54

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

modelo
Λ dominado, 280
de de Sitter, 279
de Eddington–Lemaître, 280
extremo, 280
de Einstein–de Sitter, 272
de Milne, 273
de polvo, 271
con $\Lambda \neq 0$, **276**
de vacío, *véase* modelo de Milne
estático de Einstein, 276, 280
modelos estelares, 133
MOND, *véase* teoría de la dinámica modificada
movimiento
propio, 39
superlumínico, 54, 250
modelo estándard de dos fuentes, 55
multiuniverso, *véase* teoría de multiuniversos

núcleos activos de galaxias, **246**, 248
número
de Mach, 165, 255
de Reynolds, 168
NAG, *véase* núcleos activos de galaxias
norma
de Lorentz, 94
nova, 157
enanas, 157
nube
astrofísica, 113
nucleosíntesis primordial, *véase* época de nucleosíntesis primordial

observador fundamental, 263
observatorio
del Caracol, 23
ondas
gravitacionales, 239
opacidad, 132
operador
de Laplace–Beltrami, 94
de Laplace–de Rham, 95
orbita
estable,última
en agujero negro de Schwarzschild, 227

parámetro
de densidad, 272
de desaceleración, 274
paradoja
de los gemelos, 65
paralaje, 21, 37
paralaje trigonométrico, *véase* paralaje
parsec, 37
periodo sinódico, 22
pirámide
de Kukulkan, 23
Planck
longitud de, 297
masa de, 297
tiempo de, 284, 297
unidades de, 297
polvo, 221, 271

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

potencial
vectorial del campo electromagnético, 84
escalar del campo electromagnético, 84
presión
centrífuga, 46
de empuje, *véase* presión ram
de radiación, 45
degenerativa, 45, **134**
electromagnética, 45
ram, 145
térmica, 45, 113
principio
antrópico, 299
cosmológico, 263
de equivalencia, **178**
de exclusión de Pauli, 134
de incertidumbre de Heisenberg, 135, 276
de mínima acción, 79
de Pascal, 101
de relatividad, **51**
de relatividad de Einstein, 53
de relatividad de Galileo, 53
de superposición, 90
problema
de aplanado del universo, 275, 295
de asimetría de bariones–antibariones, 284, 296
de suavizado, 296
del horizonte, 295
proceso
de extracción de Penrose, 242
producción de pares barión–antibarión, *véase* época de producción de pares barión–antibarión
producto escalar, 72, 188
de dos vectores, 48
proyección
Hammer–Aitoff, 30
Mercator, 30
pseudoescalares
en espacios euclidianos de 3D, 49
pseudotensores
en espacios euclidianos de 3D, 48
en espacios pseudo–euclidianos de 4D, 74
pulsar, **149**
índice de ruptura, 153
glitches, 149
puntos de universo, 58

quintaesencia, 41

radiación
electromagnética absorbida por atmósfera terrestre, 18
de fondo, **30**
sincrotrónica, 37, 254
radio
de Schwarzschild, *véase* Schwarzschild: radio de
gravitacional, *véase* Schwarzschild: radio de
radiogalaxia, *véase* galaxias, cuasares
rayos cósmicos, 26

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

recombinación, *véase* época de recombinación
redshift, *véase* corrimiento al rojo
regla de la cadena, 187
relación
masa–luminosidad, 133
relaciones de escala
para evolución estelar, 133
relatividad
del tiempo, 53
especial, *véase* teoría especial de la relatividad
general, *véase* teoría general de la relatividad
Ricci
escalar de, *véase* escalar de Ricci
tensor de, *véase* tensor de Ricci
Roche
lóbulo de, 156

símbolos
de Christoffel, 197
Schwarzschild
métrica de, *véase* métrica de Schwarzschild
radio de, 159, 223
señales, 52
sincronización
de relojes
en un espacio de Minkowski, 62
sistema de referencia, **51**
inercial, 51
propio de un fluido, 101
sistema solar, 26
somarios, 19
superlumíniscencia, *véase* movimiento superlumínico
supernova, **140**
expansión adiabática, *véase* supernova, expansión Sedov–Taylor
expansión libre, 144
expansión tipo Sedov–Taylor, 145
remanente de, 143
tipo I, 142
tipo II, 141

temperatura
de Hawking, *véase* temperatura de Hawking–Zeldovich
de Hawking–Zeldovich, 245
tensor
antisimétrico, 73, 188
contracción de un, 73
cuatro–dimensional, 72
de curvatura, *véase* tensor de Riemann
de densidad de flujo de momento, 165
de esfuerzos, 166
de esfuerzos viscoso, 166
de Faraday, **87**
de Levi–Civita, *véase* tensor unitario completamente antisimétrico
de Ricci, 211
de Riemann, 209
determinante de, 49, 75

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

electromagnético, *véase* tensor de Faraday
métrico, 73, 180, 188
para espacios Euclidianos de 3D, 194
simétrico, 73, 188
unitario completamente antisimétrico
de rango 3, 48
de rango 4, 74, 189
unitario de rango 2, 48, 73, 188
tensores
en espacios euclidianos de 3D, 47
en espacios pseudo–euclidianos de 4D, **70**
recíprocos, 189
teoría
de la dinámica modificada (MOND), 294
de la gran explosión, *véase* gran explosión
de la gran unificación, 296
de multiuniversos, 299
especial de la relatividad, 24, **47**
general de la relatividad, 24, **175**
heliocéntrica, 20
teorías
métricas de la gravitación, 301
teorema
de Birkhoff, 221
de Gauss
en el espacio de Minkowski de 4D, 78
en espacios euclidianos de 3D, 50
de Gauss en espacios curvos de 4D, 204
de no pelos para agujeros negros, 240
de Stokes
en el espacio de Minkowski de 4D, 78
en espacios curvos de 4D, 192
en espacios euclidianos de 3D, 50
del virial, 123
escalar, 125
relativista, 233
tensorial, 128
termodinámica
del universo, *véase* historia térmica del universo
tiempo
cósmico, 264
de caída libre, 115
de Kelvin, 119
dilación del, 68
propio, **64**, 192
transferencia
de masa, **154**
transformación
de Lorentz, 66, 67
de norma
para campo electromagnético, 87
transporte paralelo, 196, 207
traza de un tensor, *véase* tensor: contracción de un

unidad astronómica, 37
unidades
de Planck, *véase* Planck, unidades de
universo
dedos de dios, 29

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*

gran pared, 29
topología tipo esponja, 29

vacío, 276, 277
valores
propios de cantidades físicas, 68
variable cataclísmica, 157
variedad diferencial, 185
vector
de densidad de corriente, 92
de onda, 95
vectores
en espacios curvos de 4D, 185
en espacios euclidianos de 3D, 47
en espacios pseudo–euclidianos de 4D, **70**
Very Long Baseline Interferometry (VLBA), 238
violación
Carga–Paridad, *véase* violación CP
CP, 284
viscosidad
cinemática, 168
dinámica, 166
segunda, 166
turbulenta, 168
VLBA, *véase* Very Long Baseline Interferometry

Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, 37, 261
WMAP, *véase* Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

zenit, 19

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>, http://www.astroscu.unam.mx/~sergio*